



DE LA STABILITÉ DES PIÈCES COMPRIMÉES

Claude Bourdon

► To cite this version:

Claude Bourdon. DE LA STABILITÉ DES PIÈCES COMPRIMÉES. Sciences de l'ingénieur [physics]. UNIVERSITÉ PARIS 6, 1976. Français. NNT : A.0.12190 . tel-01163618

HAL Id: tel-01163618

<https://hal.science/tel-01163618>

Submitted on 15 Jun 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'enregistrement

au C.N.R.S.

A.O. 12190

THESE DE DOCTEUR INGENIEUR

présentée

A L'UNIVERSITE Pierre et Marie CURIE

PAR

MONSIEUR CLAUDE BOURDON

pour obtenir

le titre de Docteur Ingénieur

Sujet de la Thèse : DE LA STABILITE DES PIECES COMPRIMEES

Soutenue le 2 Mars 1976

devant la Commission d'Examen

MM. les Prof^{rs} R. SIESTRUNCK Président

..... R. VICHNIEVSKY. Examineur

..... A. KAMMERER. rapporteur

A ma femme qui a été ma collaboratrice

A mes enfants

A mes proches

A mes amis

A Monsieur le Professeur A. KAMMERER

Professeur à l'Ecole Centrale des Arts
et Manufactures

qui m'a guidé et encouragé dans ce travail et m'a fait
le grand honneur d'en assumer le patronage

Avec ma respectueuse et profonde reconnaissance.

A Monsieur le Professeur SIESTRUNCK

A Monsieur le Professeur J.P STUCKY,

Professeur à l'Ecole Polytechnique de LAUSANNE

qui a bien voulu donner son bienveillant appui pour
diffuser largement les idées de l'auteur dans la patrie
d'EULER.

1

UNIVERSITE DE PARIS VI
CHAIRE DE MECANIQUE DU SOLIDE

Mr. LE PROFESSEUR SIESTRUNCK

THESE DE DOCTORAT D'INGENIEUR DE Mr. Claude BOURDON

"DE LA STABILITE DES PIECES COMPRIMEES"

INTRODUCTION :

C'est au cours d'une carrière déjà longue d'ingénieur civil, et d'hydraulicien que, suivant en cela les quatre principes énoncés si clairement par notre grand DESCARTES dans la deuxième partie du DISCOURS DE LA METHODE, et notamment le troisième, qui invite à conduire ses pensées "en commençant par les objets les plus simples et les plus aisés à connaître, pour monter peu à peu comme par degrés jusques à la connaissance des plus composés", je fus amené par les circonstances à repenser le problème apparemment élémentaire de la colonne comprimée, à l'occasion d'une discussion délicate et passionnée sur l'épaisseur d'une coupole de fond d'un grand réservoir d'eau (5000 m³) que je trouvais dangereusement sous-dimensionnée.

Mon but n'était donc pas a priori de chercher une formulation plus précise de résultats expérimentaux connus, ou d'élaborer une règle pour le dimensionnement des poteaux en béton armé, mais plutôt de procéder à une analyse faisant appel aussi simplement que possible, à l'intuition, et permettant de dégager sur les problèmes d'instabilité des pièces comprimées quelques notions élémentaires susceptibles de généralisation et de vulgarisation assez larges pour être assimilées sans difficultés par le plus grand nombre des praticiens : j'entends ceux-là mêmes qui, sur les chantiers, ont la possibilité de juger "de visu" des qualités physiques et mécaniques des éléments de structure qu'ils construisent. Cette démarche m'imposait corrélativement de m'exprimer dans le langage traditionnel tiré de l'enseignement des écoles techniques et employé sur les tas, pour rendre compte du phénomène du flambement.

(1) Société de Contrôle Technique et d'Expertise de la Construction Paris.

C'est ainsi notamment que j'ai admis de conserver la notion classique, bien que parfois discutée, de "longueur de flambement libre", et même de l'étendre au cas des pieux très longs, en parlant de "longueur de flambement la plus dangereuse" notion qui, comme on le verra conduit tout naturellement à prévoir très simplement la dimension des figures de "cloquage" dans les coques.

J'ai été très satisfait de voir que mes propres idées sur la nécessité de développer, à côté des modèles "physico-mathématiques complexes", des modèles plus simples, rencontraient celles de nombreux spécialistes et notamment de Mr. J.G MAC GREGOR, professeur à l'Université de EDMONTON ALBERTA CANADA, dont j'ai beaucoup apprécié la pédagogie de l'exposé du rapport introductif d'Avril 1973 rédigé en vue du congrès de QUÉBEC 1974.

Cette nécessité m'était apparue déjà il y a quelques 25 ans à propos d'une expertise dont j'avais été chargé dans une industrie de la région Parisienne, à la suite d'un accident du travail qui avait fait deux morts, accident qui, de toute évidence était dû à un flambement d'une barre d'un treillis, et à une méconnaissance complète du risque encouru, tant par l'industriel que par la maîtrise et naturellement par les victimes.

Enfin je dois avouer que, si la lecture de quelques unes des nombreuses et belles monographies récentes qui existent sur la question du flambement des pièces comprimées m'a vivement intéressé, j'ai trouvé un plaisir égal à revenir aux sources des connaissances que nous avons de ces problèmes, c'est à dire au célèbre mémoire d'EULER : "METHODUS INVENIENDI LINEAS CURVAS MAXIMI MINIMIVE PROPRIETATE GAUDENTES" ... publié à LAUSANNE en 1744, dont la portée dépasse d'ailleurs le problème qui nous intéresse aujourd'hui; et qui n'a précédé que de quelques années l'énoncé, par le même mathématicien, de l'équation des cordes vibrantes, dont la résolution par YOUNG en 1808 devait être le prélude aux études modernes sur les vibrations tant en hydraulique qu'en mécanique du solide.

Aussi, terminerai-je cette courte introduction en citant cet extrait de Mr. ROBERT GIBRAT qui écrivait, dans son éloge au grand hydraulicien que fut Mr. Pierre DANIEL :

" Les ingénieurs sont persuadés que le passé technique est périmé. C'est très souvent exact sur le plan de l'utilisation immédiate d'un résultat technique, mais ils auraient tort de croire à l'inutilité de l'analyse des chemins par où la pensée est passée, cela les aidera beaucoup à prolonger ou à élargir le résultat obtenu."

GENERALISATION DES RESULTATS CLASSIQUES D'EULER

I. CAS DES PIECES CONSTITUEES PAR UN MATERIAU PARFAITEMENT ELASTIQUE

a) PIECES AXIALEMENT CHARGEES.

Considérons une pièce rectiligne de section constante articulée aux deux bouts, axialement chargée. Elle devient instable (elle flambe), lorsque la charge appliquée dépasse une valeur critique

$$F_c = \frac{\pi^2 E I}{l^2} \quad (1)$$

où, E est le module d'Young de la matière constituant la pièce

I le moment d'inertie (ou moment quadratique) de la section droite par rapport à un axe perpendiculaire au plan de symétrie (plan de flexion)

l longueur de la pièce entre articulations,

EULER a indiqué également les valeurs des charges critiques pour diverses liaisons d'extrémité :

- pièce encastrée à un bout et libre à l'autre
- pièce encastrée aux deux bouts
- pièce encastrée à un bout et articulée à l'autre.

Les premières expériences sur le flambement ont montré que les inexactitudes de définition géométrique de la pièce essayée, les "défauts" de la matière, (dont la loi de déformation réelle peut s'éloigner considérablement de la loi de proportionnalité classique de HOOKE) produisaient une réduction importante de la charge critique.

Des corrections furent donc apportées à la formule d'EULER pour permettre son application dans l'art de construire (et tous les ingénieurs se souviennent de la droite de TETMAYER, du coefficient de RANKINE).

Cependant, jusqu'à un passé récent toutes les formules pratiques ne s'appliquaient qu'à des barres articulées aux extrémités, et il faut attendre les travaux de Mr. DUTHEIL sur le flambement pour voir introduire dans les règles CM 66 diverses formules permettant de calculer les effets de couples de liaison élastiques appliqués aux extrémités des barres des treillis (1).

Nous allons montrer qu'il est aisé d'établir une relation générale unique entre la charge critique d'une barre flambant dans son plan et les réactions élastiques dues aux barres aboutissant à son extrémité.

(1) Voir : Règles de Calcul des Constructions en acier
Décembre 1966 Annexes § L3.8 p. 247

Soit un poteau de section constante, constitué par une matière homogène, suivant la loi de HOOKE. *fig 1*

Soit M le moment fléchissant dans une section quelconque, à la distance x de l'extrémité A.

Dans l'équilibre déformé on a la relation

$$M = F(e - y) - R(l - x) - \mu_B \quad (2)$$

où $\mu_B = k_2 \cdot \theta_B$ (moment au B)

l = longueur du poteau

e = déplacement transversal en tête

R = réaction horizontale en tête

θ_A, θ_B = rotations des sections extrêmes

La déformée satisfait à l'équation différentielle générale :

$$M = EI y'' \quad (3)$$

où $y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}$ (dérivée seconde)

de sorte que (2) s'écrit :

$$EI y'' + Fy = Fe - R(l - x) - \mu_B \quad (3bis)$$

dont la solution générale est :

$$y = A \cos px + B \sin px + e - \frac{R}{F}(l - x) - \frac{\mu_B}{F} \quad (4)$$

avec

$$p = \sqrt{\frac{F}{EI}}$$

(5)

(A et B sont des constantes inconnues)

Appelons k_1, k_2 les raideurs de rotation des appuis et k_3 la raideur de déplacement transversal relatif de B par rapport à A, et posons :

$$M_A = k_1 \theta_A ; \quad M_B = k_2 \theta_B ; \quad R = k_3 e \quad (6)$$

Les conditions d'extrémité (pour $x=0$ et $x=l$) donnent, quatre équations supplémentaires, soit au total 5 équations linéaires et homogènes entre les cinq inconnues $A, B, \theta_A, \theta_B, e$.

On écrit que le système ne peut avoir de solution non nulle que si son déterminant est nul. Soit, en posant $u = pl$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{k_1}{F} & 0 & 0 \\ 0 & p & -1 & 0 & \frac{k_3}{F} \\ \cos u & \sin u & 0 & -\frac{k_2}{F} & 0 \\ -p \sin u & p \cos u & 0 & -1 & \frac{k_3}{F} \\ 0 & 0 & \frac{k_1}{F} & \frac{k_2}{F} & -1 + \frac{k_3 l}{F} \end{vmatrix} = 0 \quad (7)$$

En exprimant les raideurs en valeurs relatives, c'est à dire en posant

$$\rho_1 = \frac{k_1 l}{EI} ; \quad \rho_2 = \frac{k_2 l}{EI} ; \quad \rho_3 = \frac{k_3 l^3}{3EI} \quad (8)$$

j'ai trouvé la relation générale :

$$\begin{aligned} & 3\rho_1 \rho_2 \rho_3 [2(1 - \cos u) - u \sin u] + \rho_1 \rho_2 u^3 \sin u + \\ & + 3(\rho_1 + \rho_2) \rho_3 u (\sin u - u \cos u) + (\rho_1 + \rho_2) u^4 \cos u + \\ & + 3 \rho_3 u^3 \sin u - u^5 \sin u = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Les raideurs d'extrémité étant supposées connues, la relation (9) est une équation trigonométrique en u , dont la plus petite solution différente de zéro donnera la charge critique cherchée :

$$F_c = \frac{u^2 EI}{l^2} \quad (10)$$

Inversement, on voit que pour un poteau donné et pour une valeur particulière de la charge critique les rai-

deurs relatives ρ_1, ρ_2, ρ_3 vérifient une relation du 3ème degré de la forme :

$$a \cdot \rho_1 \rho_2 \rho_3 + b \rho_1 \rho_2 + c(\rho_1 + \rho_2) \rho_3 + d(\rho_1 + \rho_2) + 3b \rho_3 + g = 0 \quad (11)$$

avec $a = 3[2(1 - \cos u) - u \sin u]$

$b = u^3 \sin u$

$c = 3u(\sin u - u \cos u) \quad 0 \leq u \leq 2\pi$

$d = u^4 \cos u$

$g = -u^5 \sin u = -u^2 \cdot b$

Donc pour F_c donné l'équation (9) représente dans un système de référence $O\rho_1, O\rho_2, O\rho_3$ une surface du 3ème degré :

$$\Phi(\rho_1, \rho_2, \rho_3, F_c) = 0 \quad \text{fig 2}$$

dont les lignes de niveau (situées dans les plans parallèles aux plans de coordonnées) sont des hyperboles.

La relation (9) [ou (11)] résout le problème dans tous les cas. En particulier l'encastrement à une extrémité correspond à $\rho_1 = \infty$ ou $\rho_2 = \infty$; et $\rho_3 = \infty$ correspond au cas où le déplacement transversal relatif des extrémités est empêché.

Exemple : Poteau parfaitement encasté à la base :

($\rho_1 = \infty$) (7) devient :

$$-3\rho_2 \rho_3 [2(1 - \cos u) - u \sin u] + \rho_2 u^3 \sin u + 3\rho_3 u(\sin u - u \cos u) + u^4 \cos u = 0 \quad (12)$$

On peut alors représenter (10) par une surface

$$[\rho_2, \rho_3, z = \frac{u^2}{\pi^2}]$$

en portant sur l'axe vertical Oz des valeurs z proportionnelles à la charge critique. fig 3

On voit que pour $\rho_1 = \infty$, suivant les conditions d'encastrement du poteau en tête ρ_2 et ρ_3 la charge critique peut varier entre $1/4$ et 4 fois la charge critique de la pièce articulée aux deux bouts !

Pour $\rho_2 = \infty$ et $\rho_3 = \infty$ on retrouve le résultat théorique bien connu $F_c = 4\pi^2 EI / l^2$, mais on voit en outre, d'après l'allure de la courbe $z = f(\rho_2)$ que pour les encastrements réels

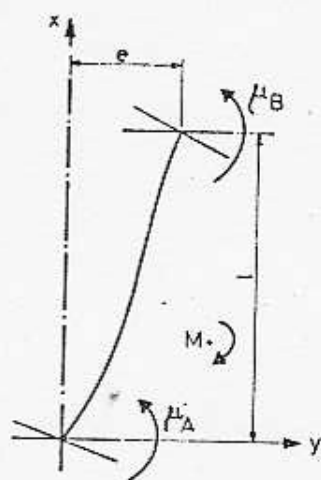


Fig 1: Système de référence d'une barre.

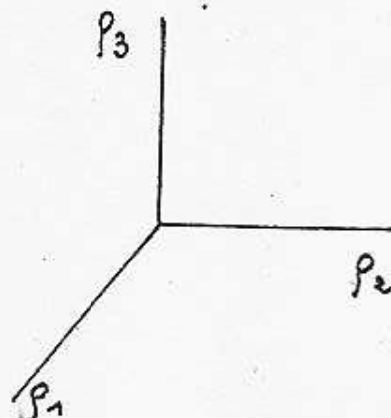


Fig 2: Axes de référence de la surface $\Phi(\rho_1, \rho_2, \rho_3, N_c) = 0$
 ρ_1, ρ_2, ρ_3 : raideurs relatives des liaisons d'extrémité.
 N_c = charge critique

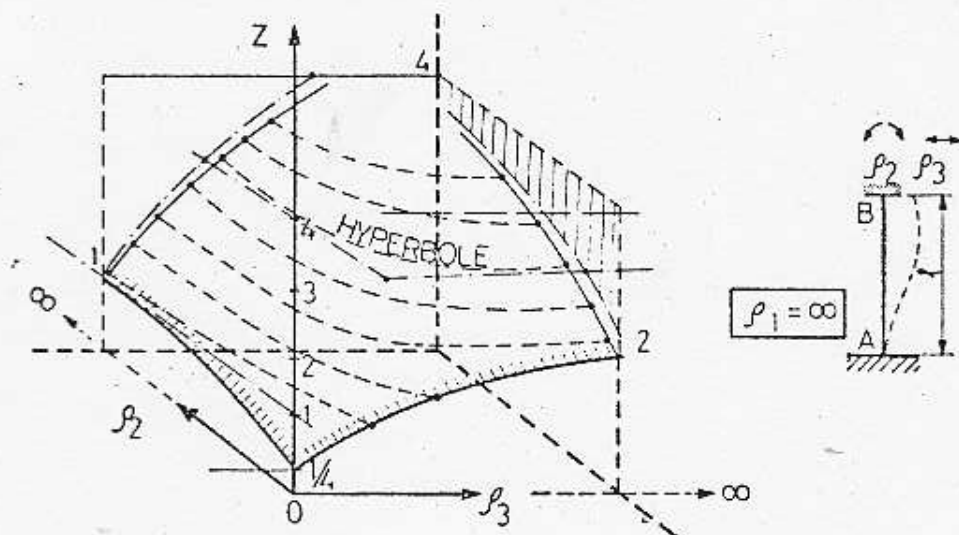


Fig 3 : Surface caractéristique dans le cas d'un poteau encastré en pied.

$$\rho_2 = \frac{k_2 l}{EI} \quad \text{avec} \quad k_2 = \frac{M_B}{\theta_B}$$

$$\rho_3 = \frac{k_3 l^3}{3EI} \quad \text{avec} \quad k_3 = \frac{R}{e}$$

la charge critique différera notablement de sa limite asymptotique (qui correspondrait à $\rho_2 = \infty$). Ceci revient à constater que l'encastrement parfait n'existe pas dans la nature et que la charge critique calculée avec les hypothèses d'EULER, compte tenu des conditions d'encastrement réelles, ne diffère pas tant des résultats d'essais que les expérimentateurs ont pu le croire généralement.

Si l'encastrement à la base n'est pas parfait $\rho_1 \neq \infty$ la charge critique est encore abaissée et peut même, évidemment tendre vers zéro, si la liaison en pied de poteau est insuffisamment rigide.

Autres cas particuliers :

- Poteau dont les extrémités ne peuvent subir aucun déplacement relatif : (fig 4) ($\rho_3 = \infty$)

$$\rho_1 \rho_2 [2(1 - \cos u) - u \sin u] + (\rho_1 + \rho_2) u (\sin u - u \cos u) + u^3 \sin u = 0 \quad (13)$$

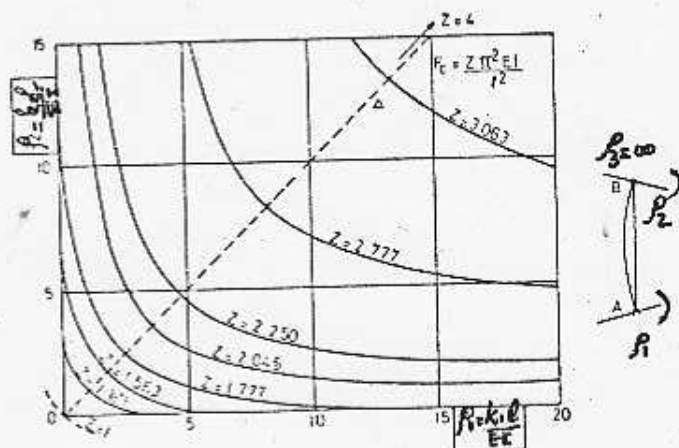
- Poteau libre de se déplacer transversalement en tête ; ($\rho_3 = 0$)

$$\rho_1 \rho_2 \sin u + (\rho_1 + \rho_2) u \cos u - u^2 \sin u = 0 \quad (14)$$

La solution de ces 2 cas particuliers avait été indiquée sous une forme un peu différente par Monsieur DUTHEIL (voir annexe aux règles CM 66).

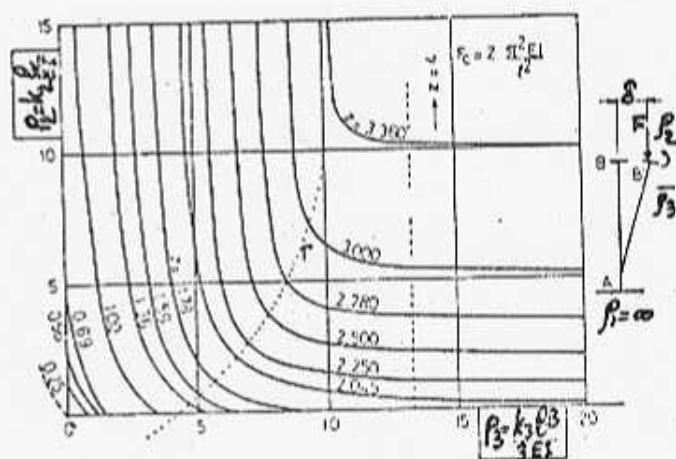
Les formules (9) et (11) ci-dessus fournissent donc une généralisation complète de ces résultats. Elles permettent d'établir un programme de calculs automatiques donnant directement la charge critique d'EULER, quelles que soient les conditions d'extrémité (rotation et déplacement relatif).

Inséré dans un programme général de structures avec les corrections nécessaires, ce programme permettra de déceler les barres qui risquent de flamber (nous supposons pour le moment le risque de flambement de torsion ou de voilement exclus).



Abaque 1: flambement des barres semi-encastrees, sans déplacement transversal relatif des appuis (cas des barres de treillis)
 p_1 et p_2 : raideurs relatives de rotation en A et B.

Fig 4



Abaque 2: flambement de poteaux encastres en pied, et pouvant subir en tête une rotation et un déplacement latéral.
 p_2 = raideur relative de rotation en B = $\frac{k_2 l}{EI}$
 p_3 = raideur relative de translation en B = $\frac{k_3 l^3}{3EI}$

Fig 5

La solution générale s'écrit

$$a p_1 p_2 p_3 + b p_1 p_2 + c (p_1 + p_2) p_3 + d (p_1 + p_2) + f p_3 + g = 0 \quad \text{plus}$$

avec $f = 3b$; $g = -b u^2$ et

$$a = 6(1 - \cos u) - 3u \sin u = 6 \sin u \left(\operatorname{tg} \frac{u}{2} - \frac{u}{2} \right)$$

$$b = u^3 \sin u$$

$$c = 3u \sin u - 3u^2 \cos u = 3u \cos u (\operatorname{tg} u - u)$$

$$d = u^4 \cos u =$$

On a : $\operatorname{tg} \frac{u}{2} = \frac{b}{d}$; $3 \frac{b}{d} \left(1 - \frac{\operatorname{tg} \frac{u}{2}}{\frac{u}{2}} \right) = -u^2 ; \dots$

Lorsque les raideurs relatives p_1, p_2, p_3 prennent des valeurs nulles ou infinies, l'équation se simplifie et on obtient :

avec une extrémité articulée :

$$p_1 = 0 \quad c p_2 p_3 + d p_2 + 3b p_3 + g = 0$$

$$p_2 = 0 \quad c p_1 p_3 + d p_1 + 3b p_3 + g = 0$$

et avec une extrémité encastree

$$p_1 = \infty \quad a p_2 p_3 + b p_2 + c p_3 + d = 0$$

$$p_2 = \infty \quad a p_1 p_3 + b p_1 + c p_3 + d = 0$$

D'autre part, si les extrémités ne peuvent subir de déplacement transversal relatif (cas des treillis)

$$p_3 = \infty \quad a p_1 p_2 + c (p_1 + p_2) + 3b = 0$$

ou, au contraire si rien ne s'oppose au déplacement transversal relatif

$$p_3 = 0 \quad b p_1 p_2 + d (p_1 + p_2) + g = 0$$

On peut poursuivre l'analyse des cas particuliers en considérant par exemple deux raideurs relatives nulles :

$$p_1 = 0, p_2 = 0 \quad 3b p_3 + g = 0$$

$$p_2 = 0, p_3 = 0 \quad d p_1 + g = 0$$

$$p_3 = 0, p_1 = 0 \quad d p_2 + g = 0$$

ou au contraire deux raideurs relatives infinies

$$p_1 = \infty, p_2 = \infty \quad ap_3 + b = 0$$

$$p_2 = \infty, p_3 = \infty \quad ap_1 + c = 0$$

$$p_3 = \infty, p_1 = \infty \quad ap_2 + c = 0$$

ou enfin une raideur relative nulle et une raideur relative infinie

$$p_1 = 0, p_2 = \infty \quad \text{ou} \quad p_2 = 0, p_1 = \infty \quad \rightarrow \quad cp_3 + d = 0$$

$$p_1 = 0, p_3 = \infty \quad cp_2 + 3b = 0$$

$$p_2 = 0, p_3 = \infty \quad cp_1 + 3b = 0$$

$$p_1 = \infty, p_3 = 0 \quad bp_2 + d = 0$$

$$p_2 = \infty, p_3 = 0 \quad bp_1 + d = 0$$

Il y a lieu d'ajouter les solutions pour lesquelles l'un des coefficients a, b, c, d, g de l'équation générale est nul, et qui correspondent aux cas particuliers habituellement considérés.

$$a = 0 \quad \frac{u}{2} = \operatorname{tg} \frac{u}{2}$$

$$b = 0 \quad u = \pi$$

$$c = 0 \quad u = \operatorname{tg} u$$

$$d = 0 \quad u = \frac{\pi}{2}$$

$$g = -bu^2 = 0 \quad u = 0$$

$$p_1 = \infty, p_2 = \infty, p_3 = \infty$$

$$p_1 = 0, p_2 = 0, p_3 = \infty$$

$$p_1 = \infty, p_2 = \infty, p_3 = 0$$

$$p_1 = 0, p_2 = \infty, p_3 = \infty$$

$$p_1 = \infty, p_2 = 0, p_3 = \infty$$

$$p_1 = 0, p_2 = \infty, p_3 = 0$$

$$p_1 = \infty, p_2 = 0, p_3 = 0$$

$$p_1 = p_2 = p_3 = 0$$

(pas d'équilibre stable)

obtenus en divisant a, b, c, d, f, g par u^3/niu

u^2	m	a_1	b_1	c_1	d_1	f_1	g_1
0	0	0,25	1	1	1	3	0
0,274	1/36	0,257	"	1,019	0,907	"	- 0,274
0,617	1/16	0,266	"	1,044	0,785	"	- 0,617
1,097	1/9	0,281	"	1,082	0,605	"	- 1,097
2,467	1/4	0,332	"	1,216	0	"	- 2,467
4,386	4/9	0,447	"	1,511	- 1,209	"	- 4,387
5,552	9/16	0,567	"	1,814	- 2,356	"	- 5,552
6,854	25/36	0,810	"	2,422	- 4,534	"	- 6,854
π^2	1	$+\infty$	"	$+\infty$	$-\infty$	"	$-\pi^2$
13,434	49/36	- 0,678	"	- 1,194	+ 6,348	"	- 13,433
15,421	25/16	- 0,434	"	- 0,569	+ 3,927	"	- 15,421
17,546	16/9	- 0,312	"	- 0,243	+ 2,418	"	- 17,546
19,039	1,929	- 0,261	"	- 0,097	+ 1,588	"	
		- 0,25	"	0	1	"	
20,592	2,086	- 0,222	"	+ 0,029	0,800	"	
22,207	9/4 = 2,25	- 0,192	"	+ 0,135	0	"	- 22,207
27,415	25/9	- 0,134	"	+ 0,440	- 3,023	"	- 27,416
30,226	49/16	- 0,114	"	+ 0,645	- 5,498	"	- 30,226
33,173	121/36	- 0,099	"	+ 0,993	- 9,976	"	- 33,173
$4\pi^2$	4	0	1	$+\infty$	$-\infty$	"	$-4\pi^2$

B1. PIÈCES COMPRIMÉES ET FLECHIES :

-13-

La notion encore "mathématique" de stabilité élastique telle que nous venons de la développer peut-être précisée de façon plus physique en considérant le modèle simple d'un poteau rectiligne soumis à deux charges égales et opposées de même excentricité a . (fig 6)

PIGEAUD avait déjà traité ce problème dans son excellent cours de Résistance des Matériaux à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées... et après lui le professeur TIMOSHENKO l'a longuement développé dans son ouvrage sur la "Stabilité Elastique".

Le calcul de la déformée s'effectue en suivant un processus analogue à celui que nous avons indiqué plus haut pour la pièce axialement chargée.

En prenant l'origine des axes au milieu C de la colonne, on a :

$$M = F[(a+e) - y] \quad (15)$$

$$\text{et } EI y'' + Fy = F(a+e) \quad (16)$$

d'où, en posant comme plus haut $p = \frac{F}{EI}$

$$e = a \left(\frac{1}{\cos u} - 1 \right) \quad (17) \quad \text{avec } u = \frac{pl}{2}$$

la déformée est une sinusoïde de longueur d'onde $L = \frac{\pi}{p}$

Nous appellerons "coefficient d'amplification" le rapport :

$$\chi = \frac{a+e}{a} = \frac{1}{\cos u} \quad (18)$$

soit, compte tenu de la valeur de la charge critique d'EULER

$$F_c = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad \text{et de } u = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{F}{F_c}}$$

$$\chi = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{F}{F_c}}} \quad (19)$$

La courbe représentative de cette fonction de F/F_c a l'allure indiquée sur la figure 8. Elle a une asymptote verticale pour $F = F_c$ et la pente de sa tangente à l'origine vaut $\frac{\pi^2}{8} \frac{F}{F_c}$

On voit aisément que si l'on veut éviter d'avoir une amplification supérieure à 2 ou 3, on devra limiter la charge appliquée F à une fraction de la charge critique de l'ordre de 0,60.

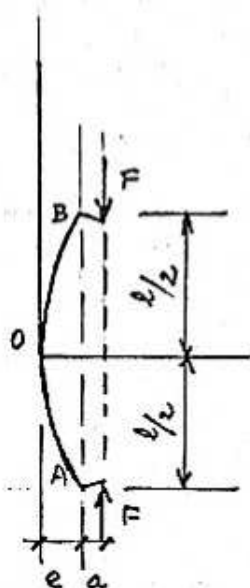


Fig 6: Poteau soumis à une charge d'excentricité a

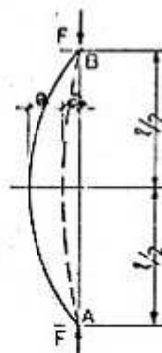
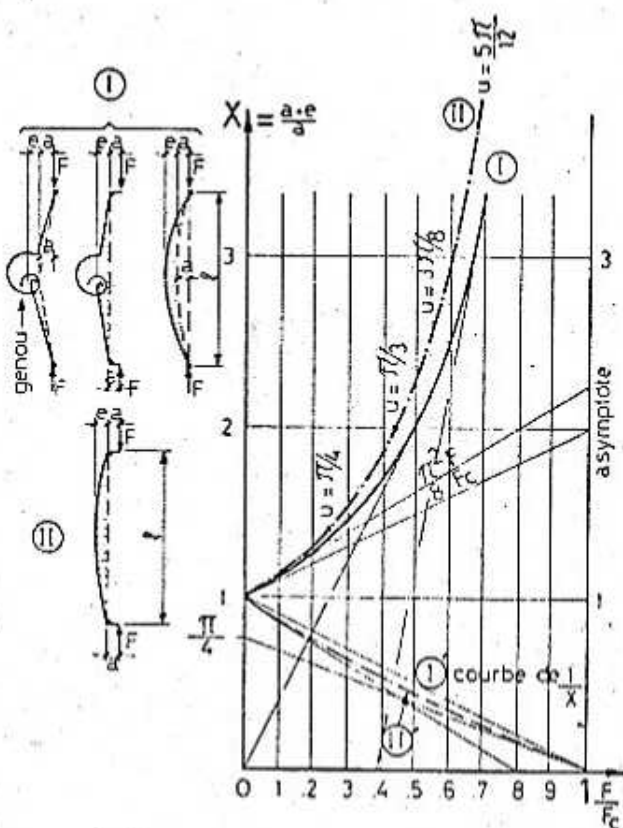


Fig 7 Poteau ayant une déformée initiale sinusoïdale



$$\textcircled{I} \quad X = \frac{1}{1 - \frac{F}{F_c}}$$

$$\textcircled{II} \quad X = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{F}{F_c}}}$$

Fig 8: Représentation du coefficient d'amplification X des déformations (ou défauts) d'une pièce comprimée en fonction du rapport F/F_c de la charge à la charge critique.

Pour les très faibles charges, on peut montrer qu'en première approximation

$$\frac{1}{\chi} \approx 1 - \frac{\pi^2 F}{8 F_c}$$

Au contraire, lorsque F se rapproche de la valeur théorique F_c :

$$\frac{1}{\chi} \approx \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{F}{F_c}\right)$$

Cette notion d'amplification des flèches a conduit Mr. DUTHEIL à établir une méthode pratique de vérification des pièces métalliques comprimées, qui est à la base des règles CM 66.

Elle s'applique aussi au problème du flambement des pièces en béton armé.

Ecartons légèrement la pièce de sa position d'équilibre (de ε). La variation du moment extérieur (actif) dans la section médiane est

$$dM_e = F \cdot \varepsilon$$

La variation correspondante du moment interne (résistant), lié à la courbure de la pièce est :

$$dM_i = dM_e \left(1 + \frac{2}{u \tanh u}\right) \quad \text{avec} \quad u = \frac{p l}{2}$$

On voit que la variation du moment résistant est toujours supérieure, au voisinage de l'équilibre, à celle du moment actif. Leur différence est d'autant plus faible que la charge F se rapproche de la charge critique $F_c = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$ (qui correspond à $u = \frac{\pi}{2}$).

Les contraintes dans la section médiane de la pièce fléchie et comprimée sont données par la formule :

$$\sigma = \frac{F}{S} \pm \frac{F \cdot a}{\frac{I}{v} \cdot \cosh u} \quad (21)$$

On peut généraliser l'étude ci-dessus au cas d'une pièce soumise à une charge excentrée, dont les extrémités sont soumises à des conditions d'encastrement quelconques. On aboutit à un système de 5 équations entre les inconnues A, B, θ_A, θ_B et e , avec les mêmes coefficients que pour la pièce axialement chargée, mais ayant cette fois des seconds membres non tous nuls.

Dans le cas particulier illustré on obtient ainsi le tableau des coefficients :

A	B	θ_A	θ_B	e	terme constant
1	0	$\frac{k_1}{F}$	0	0	0
0	p	-1	0	$\frac{k_2}{F}$	0
$-\cosh u$	$\sinh u$	0	$-\frac{k_2}{F}$	0	-a
$-p \sinh u$	$p \cosh u$	0	-1	$\frac{k_3}{F}$	0
0	0	$\frac{k_1}{F}$	$\frac{k_2}{F}$	$-1 + \frac{k_3 l}{F}$	+a

(22)

Le déterminant des coefficients, Δ , a été calculé plus haut, et on peut calculer les 5 inconnues par la règle de CRAMER. On obtient ainsi A , B , θ_A , θ_B et e comme fonctions de u , de a et des raideurs relatives ρ_1, ρ_2, ρ_3 et l'on trouve l'expression du déplacement en tête :

$$e = -\frac{a}{\Delta \cdot u} \left[(1 - \cos u) \rho_1 + u \sin u \right] \quad (23)$$

d'où le coefficient d'amplification :

$$\chi' = \frac{a+e}{a} = 1 + \frac{1}{|\Delta| \cdot u} \left[(1 - \cos u) \rho_1 + u \sin u \right] \quad (24)$$

$|\Delta|$ est une fonction de ρ_1, ρ_2, ρ_3 $u < \frac{\pi}{2}$

Avec d'autres conditions d'extrémité (par exemple excentricité donnée de la réaction en A) on trouverait une autre expression du coefficient d'amplification.

Au lieu de considérer une excentricité de la charge aux extrémités du poteau chargé, considérons l'effet d'une déformation initiale sinusoïdale. (fig 7)

Pour un poteau articulé aux extrémités le coefficient d'amplification s'écrit :

$$\chi = \frac{a+e}{a} = \frac{1}{1 - \frac{F}{F_c}} \quad (25)$$

F = charge appliquée

F_c = charge critique d'Euler

C'est la formule bien connue de PERRY

La courbe représentative de cette fonction $\chi = f\left(\frac{F}{F_c}\right)$ diffère peu, pour les valeurs de $\frac{F}{F_c}$ inférieures à 0,5 de celle déjà trouvée plus haut.

Un autre modèle mécanique intéressant (représenté sur la figure 8) est celui d'une barre très rigide coupée en son milieu, et dont les deux parties sont raccordées par une lame de ressort. Supposons que sous l'action des forces $\pm F$ le point C se déplace jusqu'à une position d'équilibre C' telle que $CC' = e$

Chaque tronçon de barre subit donc une petite rotation $\theta = \pm \frac{2e}{l}$

Le moment résistant dû au ressort est proportionnel à θ

$$M_c = 2k \cdot \theta = \frac{4k \cdot e}{l} \quad (26)$$

et le moment moteur

$$M'_c = F.(a+e) \quad (27)$$

De l'égalité de ces moments, on tire l'expression suivante du coefficient d'amplification χ :

$$\chi = \frac{a+e}{a} = \frac{1}{1 - FL/4R}$$

X tend vers l'infini pour $F_c = \frac{4R}{l}$ et s'écrit encore

$$\frac{FL}{4R} = 1$$

$$\chi = \frac{1}{1 - F/F_c} \quad (28)$$

comme dans le cas de la pièce flexible de section uniforme ayant une déformée initiale sinusoïdale.

Il résulte des formules (19), (25), (28) que l'effet d'un défaut géométrique dépend très peu comme Mr. DUTHEIL l'avait déjà fait remarquer, de sa distribution le long de la pièce, mais surtout de son amplitude maximale.

D'après les calculs qui précèdent, l'instabilité élastique apparaît lorsque la charge dépasse une limite au dessus de laquelle la raideur de la pièce devient insuffisante pour maintenir l'équilibre "fléchi".

Ces résultats peuvent faire l'objet d'une seconde interprétation :

Supposons que la ligne élastique soit un arc de sinusoïde. Nous obtiendrions la même déformation de la pièce sous l'effet d'une charge transversale répartie d'intensité :

$$p = p_0 \cdot \sin \frac{\pi x}{l} \quad (\text{voir fig. 10}) \quad (29)$$

la charge totale est

$$P = \int_0^l p_0 \sin \frac{\pi x}{l} \cdot dx = \frac{2p_0 l}{\pi}$$

et l'effort tranchant au point d'abscisse x est

$$T = \frac{p_0 l}{\pi} \cos \frac{\pi x}{l} \quad (30)$$

le moment de flexion dans la même section est :

$$M = \frac{p_0 l^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{l} \quad (31)$$

Au milieu C de la travée on a

$$M_c = \frac{p_0 l^2}{\pi^2} \quad (32)$$

La déformation transversale est, en un point d'abscisse x , d'après la théorie des poutres

$$y = \frac{p_0 l^4}{\pi^4 EI} \cdot \sin \frac{\pi x}{l} \quad (33)$$

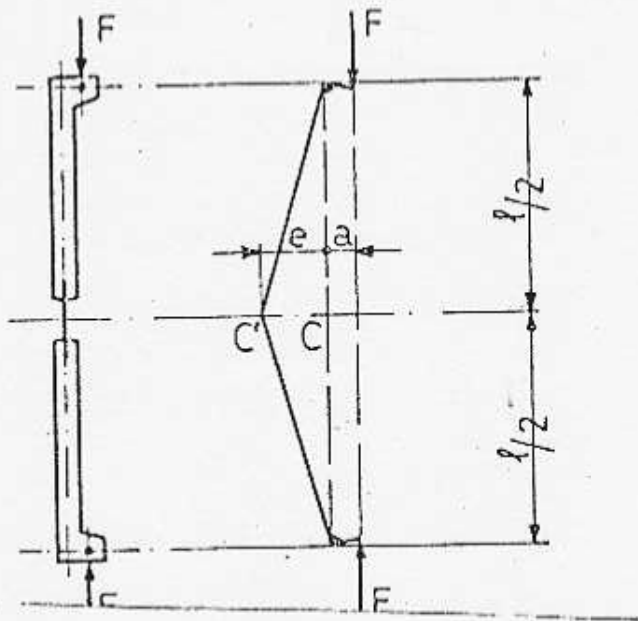
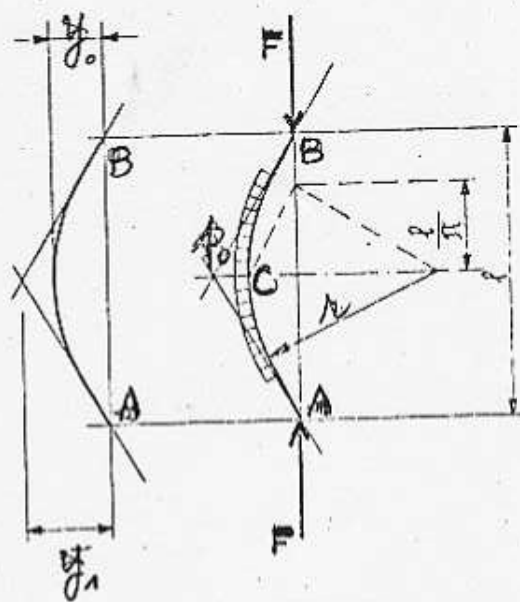


Fig 9: Modèle mécanique pour l'étude du flambement des tiges, composé de leviers et d'un ressort central.



p_0 = pression fictive

$$F = p_0 r = \frac{\pi^2 E I}{l^2}$$

$$y_0 = \frac{p_0 l^4}{\pi^4 E I}$$

$$y_1 = \frac{p_0 l^4}{2\pi^3 E I}$$

$$r y = \frac{l^2}{\pi^2}$$

Fig 10: Forces fictives de rappel d'une barre comprimée avec une déformée sinusoïdale.

et sa valeur maximale au milieu de la portée est :

$$\boxed{y_m = \frac{p_0 l^4}{\pi^4 EI} \approx \frac{p_0 l^4}{100 EI}} \quad (34)$$

D'autre part, le rayon de courbure au sommet d'une sinusoïde d'équation

$$y = A \sin \frac{\pi x}{l}$$

vaut
$$r = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} = \frac{l^2}{\pi^2 A} \quad (35)$$

ou, avec $A = \frac{p_0 l^4}{\pi^4 EI}$

$$\boxed{r = \frac{\pi^2 EI}{p_0 l^2}} \quad (36)$$

Appliquons maintenant à la pièce une charge longitudinale F et supposons l'équilibre fléchi possible.

Tout se passe comme si la raideur de la poutre développait de petites forces fictives p_0 ; équilibrées dans l'arc AB par la poussée F et la "formule du tube" nous donne

$$F = p_0 \cdot r \quad (37)$$

soit, d'après (36)

$$\boxed{F_c = \frac{\pi^2 EI}{l^2}} \quad (38)$$

Nous retrouvons par des considérations de géométrie et de mécanique élémentaires le résultat d'EULER.

Tout se passe donc comme si la raideur de la poutre était équivalente à celle d'un milieu élastique extérieur, de "module de réaction"

$$\boxed{k = \frac{p_0}{y_m} = \frac{\pi^4 EI}{l^4}} \quad (39)$$

et la formule d'EULER prend la forme

$$\boxed{F_c = \frac{k l^2}{\pi^2} = \sqrt{EI k}} \quad (40)$$

Inversement la formule (39) nous donne la longueur de flambement

$$l = \pi \cdot \sqrt[4]{\frac{EI}{k}} = \pi \cdot \sqrt{\frac{F_c}{k}} \quad (41)$$

II. GENERALISATION AUX MATERIAUX REELS. CAS DU BETON ARME.

Les calculs ci-dessus ont été effectués dans l'hypothèse d'un matériau obéissant à la loi de HOOKE.

Il reste donc à examiner comment ces résultats peuvent être extrapolés pour les matériaux réels.

Pour les pièces métalliques grêles, les nombreux essais effectués depuis le début de l'ère de la construction métallique, ont conduit à affecter les formules ci-dessus de coefficients correctifs.

Dans la formule de NAVIER-RANKINE, on compare une contrainte de compression majorée (dans le rapport $1 + F/F_c$) à la contrainte de rupture par compression du matériau, et

$$\sigma_a \cdot \left(1 + \frac{F}{F_c}\right) \leq \frac{\sigma_a}{m} \quad (42)$$

m = coefficient de sécurité

F_c = charge critique d'Euler

F = charge réelle

si F est éloigné de F_c le coefficient correctif $(1 + F/F_c)$ est voisin de $\frac{1}{1 - F/F_c}$ c'est à dire du coefficient d'amplification des défauts géométriques calculé plus haut.

Ultérieurement ENGESSER et KARMAN, étudiant le flambage des pièces métalliques dans le domaine plastique ont proposé de corriger le module de déformation et préconisé d'appliquer les formules théoriques avec un module réduit de flambage

$$E_r = \frac{4 E E_t}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_t})^2} \quad (43)$$

où

E = module d'élasticité

E_t = module tangent (traduisant la loi de déformation au voisinage de la contrainte critique)

En pratique ces auteurs proposent la formule :

$$E_r = \frac{3,6 E \cdot E_t}{(\sqrt{E} + 0,9 \sqrt{E_t})^2} \quad (44)$$

Plus récemment, Mr. DUTHEIL, en France, a ramené le problème de la stabilité des pièces métalliques ^{comprimées} à un problème de flexion composée. Il tient compte de l'amplification des déformations initiales (ou dues à des charges transversales) sous l'effet de la compression. Le coefficient d'amplification

Voir "Règles de Calcul des Constructions en acier CM 66".

reste de la forme $\frac{1}{1-F/F_c}$ mais F_c' est alors la charge critique réelle au lieu de la charge critique d'Euler.

En outre, Mr. DUTHEIL tient compte d'un coefficient de réduction de 1,3. (voir fig 11)

Examinons maintenant le cas des poteaux en béton armé.

Considérons pour simplifier, un poteau de longueur l soumis à une charge N ; donnons à cette charge une excentricité a croissante.

Pour les faibles valeurs de a la pièce va fléchir légèrement, les sections restant tout d'abord entièrement comprimées sur toute la hauteur du poteau.

Puis à un moment donné la flèche à mi-hauteur soit ($a+e$) devient égale à $h/6$ et des tractions (d'abord très faibles) apparaissent sur la fibre tendue.

$$\text{On a alors sensiblement } \frac{a+e}{a} = \frac{1}{1-F/F_c} \approx \frac{h}{6a}$$

$$\text{d'où } a = \frac{h}{6} \left(1 - \frac{F}{F_c}\right) \quad (45)$$

Si l'on fait croître l'excentricité a à partir de cette valeur, l'inertie de la section médiane décroît de I_1 (Inertie de la pièce non fissurée) à I_2 (Inertie correspondant à la flexion simple). (voir fig 12)

On peut admettre, en première approximation que tout se passe pour les petites déformations comme si le poteau avait une inertie fictive constante I' comprise entre I_1 et I_2 .

Le coefficient d'amplification devient

$$\chi' = \frac{1}{1 - \frac{F}{F_c'}} \quad (46)$$

$$\text{avec } F_c' = \frac{\pi^2 EI'}{l^2}$$

$$F_c' < F_c$$

et la courbe représentant χ' en fonction de $\frac{F}{F_c}$ est affine de la courbe

$$\chi = \frac{1}{1 - F/F_c} \quad (47)$$

par rapport à l'axe $O\chi$, dans le rapport F_c'/F_c (fig 13), (fig 14).

.../...

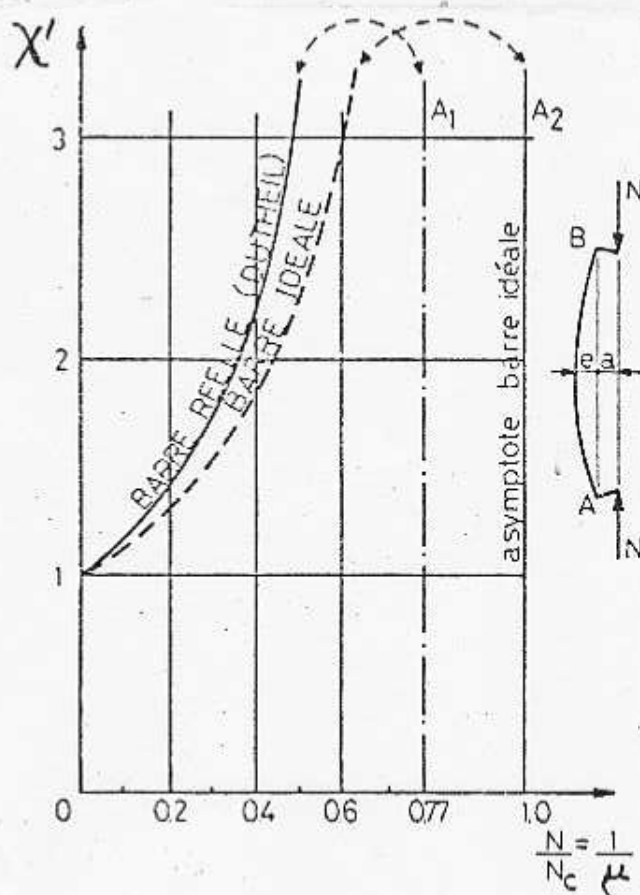


Fig 11 : Coefficient d'amplification χ' des déformations d'une pièce comprimée, en fonction du rapport N/N_c de la charge à la charge critique, dans le cas des pièces en acier, (d'après DUTHEIL).

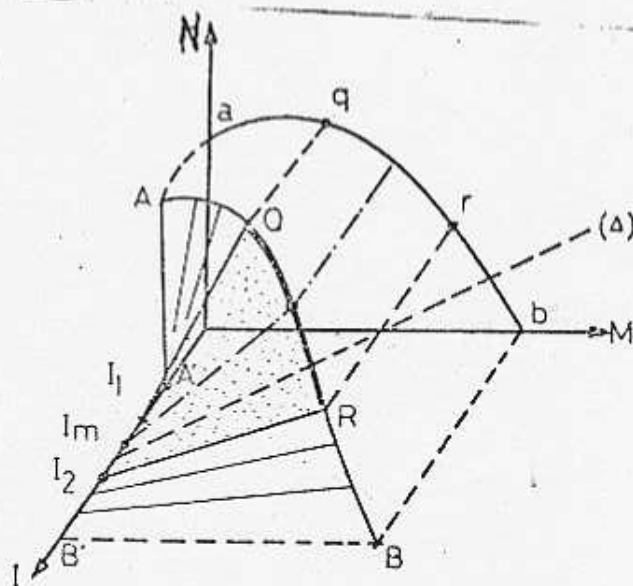


Fig 12: "Surface mécanique" représentant la relation entre l'inertie I d'une section d'une pièce en béton armé, et les éléments de réduction M et N des efforts appliqués au centre de gravité de la section homogène.

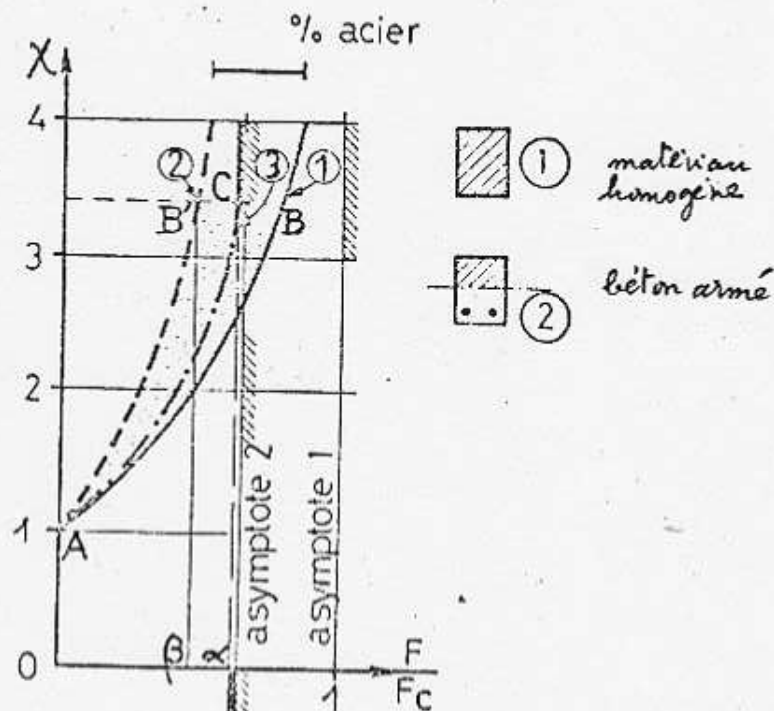


Fig 13: Coefficient d'amplification χ des déformations d'une pièce comprimée en béton armé, en fonction du rapport F/F_c de la charge à la charge critique.

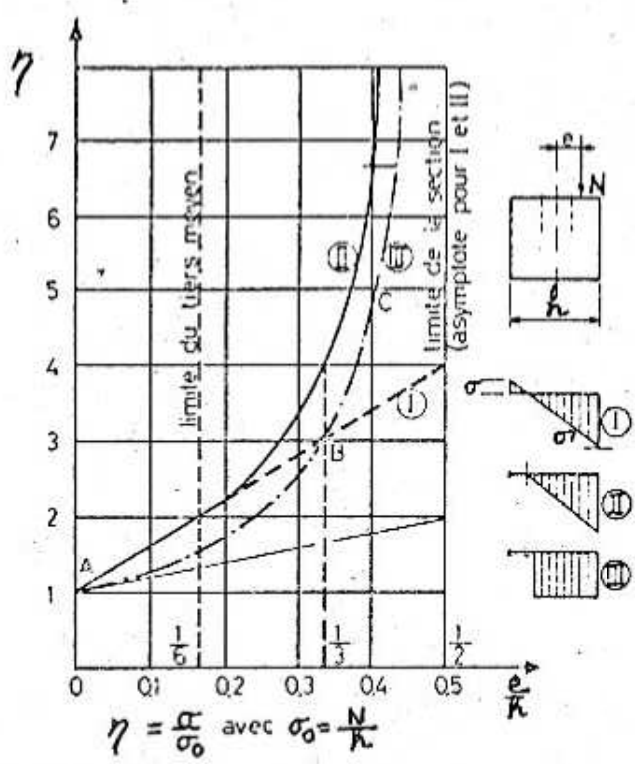


fig 14 : Accroissement relatif de la contrainte maximale au bord d'une section rectangulaire en fonction de l'excentricité relative e/h dans les 3 cas suivants :

- I Matériau résistant à la traction (loi de Navier)
- II Matériau idéal, sans résistance à la traction, (cas du béton), avec diagramme triangulaire.
- III Matériau idéal, sans résistance à la traction, avec diagramme rectangulaire

Il est évident que lorsque la charge F se rapproche de la charge critique, la loi écrite ci-dessus ne peut représenter la réalité, car la déformation du poteau a pour limite supérieure la déformation correspondant à la charge critique réelle, et l'on peut alors représenter la loi $\chi = f(F/F_c)$ par un arc de courbe tel que AB' (②).

Au point C, compris entre les deux asymptotes verticales qui correspondent respectivement à J_1 et à J_2 la tangente est verticale,

et
$$\frac{F}{F_c} = \alpha$$

La valeur α sera évidemment d'autant plus proche de l'unité que le poteau sera plus armé.

Si β est le rapport de l'inertie de la section réduite homogénéisée du poteau soumis à la flexion simple à l'inertie de la section homogénéisée correspondant à une compression centrée, on a $0 < \beta \leq \alpha \leq 1$.

β est d'autant plus proche de l'unité que le pourcentage d'acier est plus élevé. La courbe se trouve donc comprise dans le fuseau BAB' (bien déterminé pour un poteau de section donnée).

Tout se passe comme si la pièce avait un moment d'inertie fictif moyen I_m .

La fissuration, dès qu'elle commence à se produire engendre un accroissement des efforts internes, et une amplification supplémentaire des déformations d'autant plus grande que l'écart entre les valeurs extrêmes de l'inertie est lui-même plus élevé.

M. P. FAESSEL a proposé en France pour des poteaux articulés soumis à des charges excentrées une méthode de résolution, basée sur la relation "excentricité - courbure" de la section médiane d'un poteau ayant une déformée sinusoïdale.

Les tables établies d'après cette méthode par MM. FAESSEL, ROBINSON et MORISSET, pour le calcul des poteaux aux états limites, ont été contrôlées par un grand nombre d'essais de laboratoire effectués par Mr. MODJABI et donnent la charge ultime avec une très bonne approximation dans les cas usuels. Il y aurait lieu toutefois, à notre avis de les employer avec prudence dans le cas de poteaux à faible pourcentage d'armature. Mr. CAPRA ingénieur à la SOCOPEC, auquel nous avons posé en 1970 le problème du calcul de la déformée de poteaux très élancés que nous contrôlions, et que nous avons nous-mêmes vérifiés par un calcul aux différences finies appliqué à des tronçons d'égale hauteur, a réussi à mettre au point, pour les poteaux de section rectangulaire, un programme de calcul basé sur la relation "excentricité - courbure", mais ne comportant plus aucune hypothèse restrictive sur la forme de la déformée.

23/ Celle-ci peut-être calculée à partir d'une section de départ, pour diverses lois de déformation imposées du béton.* La relation "excentricité - courbure" est satisfaite non seulement au milieu du poteau, mais en tout point (et notamment aux extrémités du poteau)

* fig 15) Pour des sections de formes complexes cette méthode se heurte malheureusement à des difficultés assez grandes pour la détermination de la "surface mécanique" représentant l'état de contrainte et de déformation d'une section soumise à un effort normal N et à un moment fléchissant M donnés.

Ce programme fournit pour un poteau donné, chargé, avec l'excentricité choisie, la relation $N = f(\frac{1}{\rho})$ (charge, courbure).

On voit, sur le diagramme correspondant (fig. 16) que N atteint un maximum qui correspond à la valeur limite.

La courbe $N = f(\frac{1}{\rho})$ est une traduction de la loi d'amplification des déformations, à charge croissante, que nous avons définie plus haut, et rend compte de la "non linéarité" de la relation entre charge et déformation (arc OA). L'arc de courbe AB n'a pas de sens physique (les équilibres correspondants sont instables).

En enchaînant ce programme à un programme de calcul des "longueurs de flambement", basé sur formule (9), nous espérons pouvoir aboutir sans trop de difficultés en procédant par approximations successives, à une solution acceptable en pratique du problème du poteau de béton armé de section rectangulaire, inclus dans une ossature, quelles que soient les conditions d'extrémité.

Malgré les résultats très prometteurs de ces travaux d'informatique scientifique, il nous a paru intéressant de pousser des recherches dans une autre direction, faisant appel à des concepts et à des raisonnements plus proches de ceux de la physique, et nous avons ainsi été tout naturellement conduits à élaborer la "théorie des empilages élastiques", et à proposer une méthode de calcul entièrement nouvelle applicable au calcul des pièces comprimées en béton armé.

C'est le résumé de ces études que nous présentons aujourd'hui.

Je tiens à exprimer ici ma reconnaissance à Monsieur Albert KAMMERER, Professeur à l'Ecole Centrale des Arts & Manufactures, ainsi qu'à Monsieur le Professeur SIESTRUNK des encouragements et du soutien qu'ils m'ont apporté dans la préparation de ce travail.

-
- (1) B. BROMS B and I. K. VLEST
Long reinforced concrete columns - A Symposium Transactions ASCE V 126 1961
 - (2) J. R. ROBINSON & MODJABI
La précision des charges de flambement des poteaux en béton armé par la méthode de M. P. FÄSSSEL, Annales de l'ITBTP N° 249 Sept. 1968

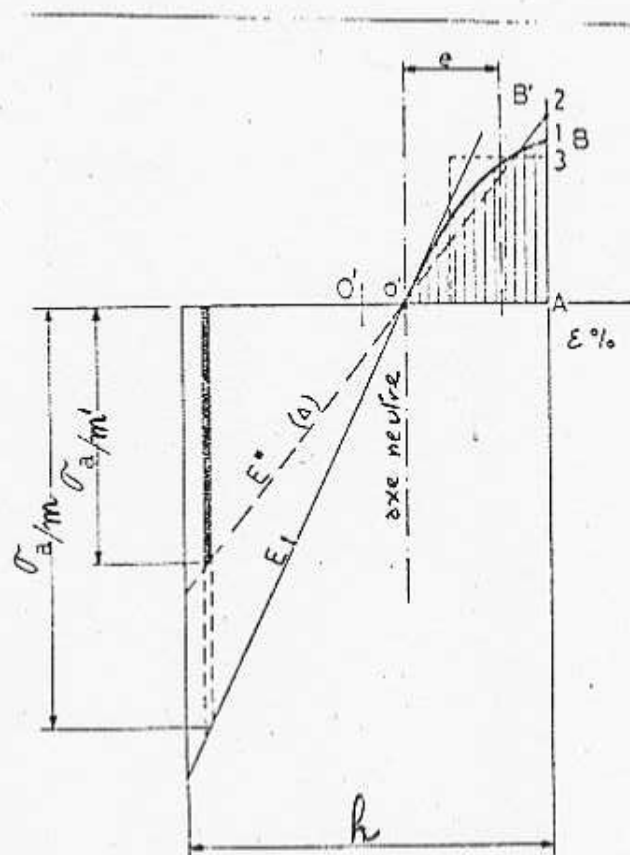


Fig 15: Détermination du module de déformation fictif "équivalent", E^* , pour une section de béton armé, où la loi de répartition des contraintes est connue.

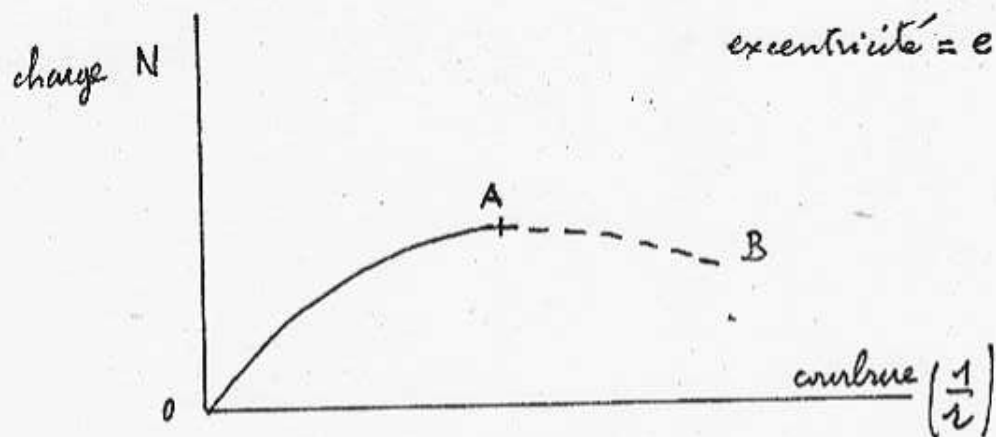


Fig 16: Représentation de la relation $N = f(1/r)$.

THEORIE SIMPLIFIEE DES EMPILAGES ELASTIQUES :I CONSIDERATIONS GENERALES

On peut imaginer qu'un poteau en béton armé en équilibre fléchi sous une charge N appliquée avec une excentricité a se comporte comme s'il était formé de l'association de deux poteaux fictifs constitués l'un par le béton seul, et l'autre par la cage d'armatures supposée entretoisée par les armatures transversales et des "bielles" de béton obliques.

La charge totale de l'ensemble a pour borne inférieure la somme des charges de la pièce en béton et de la cage d'armature, considérées isolément dans le même état déformé (le béton pouvant être fissuré si la flexion est assez importante). Il en est en particulier ainsi pour la charge critique ultime de flambement d'ensemble du poteau, puisque la séparation de la colonne composite en deux colonnes fictives, l'une en béton et l'autre en métal revient à négliger les liaisons qui assurent la coïncidence des deux déformées.

On pourra donc aborder la question du flambement des poteaux en béton armé, à partir de cette définition du poteau composite, si l'on est en mesure :

a) de résoudre le problème théorique du poteau en béton dépouillé de son armature,

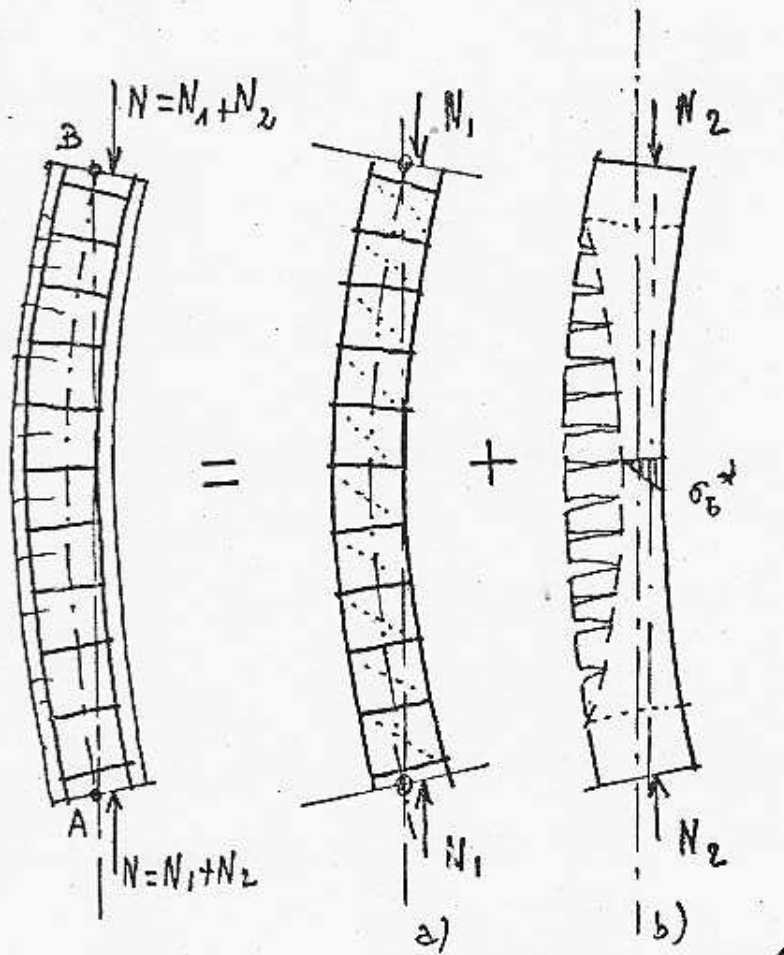
b) de déterminer l'influence des liaisons "béton-acier" sur les charges ultimes de chacune des deux colonnes, dans leur état limite déformé, ou ce qui revient au même, l'erreur que l'on commet en imposant à chaque poteau une déformée théorique déterminée, différente pour les besoins du calcul de la déformée commune, dont le calcul, on le sait ne peut être effectué, dans l'état actuel des connaissances, que pour des conditions d'extrémité particulières.

On admettra que la cage d'armature supposée seule subit une déformation sinusoïdale correspondant à la solution approximative donnée généralement à ce problème, dans le domaine élastique. Cette déformée sinusoïdale serait sous charge axiale, un arc complet de sinusoïde et sous charge excentrée, un arc partiel de sinusoïde (voir fig 17)

Ainsi, sommes nous conduits au problème préalable du poteau en béton non armé.

Pour pouvoir raccorder notre étude aux hypothèses de calcul habituelles de la résistance des matériaux appliquées au béton armé, nous admettrons, tout d'abord :

- que le béton ne résiste pas à la traction, ce qui revient à assimiler la colonne à un empilage d'éléments élastiques de même hauteur, dont les faces sont normales à la ligne moyenne,



Poteau en béton armé, en équilibre fléchi

a) Colonne d'armatures

b) Poteau en béton non armé

Fig 17. Comportement des éléments constitutifs d'un poteau en béton armé, dans l'équilibre fléchi.

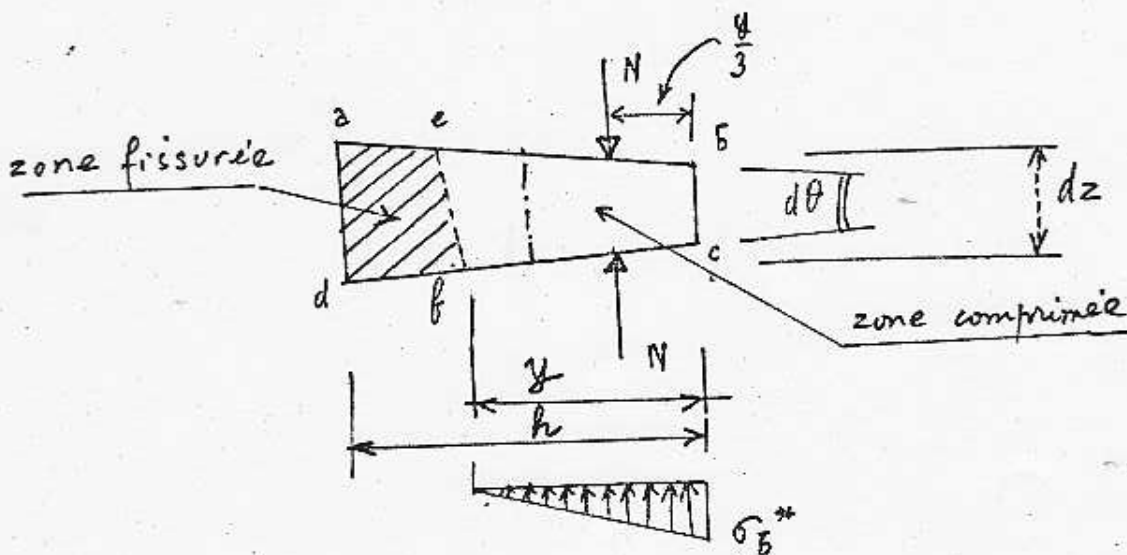


Fig 18: Élément d'un "empilage" élastique

- que l'hypothèse de BERNOULLI (indéformabilité des sections) et la loi de HOOKE (proportionnalité des déformations aux contraintes) sont toutes les deux vérifiées pour la partie des éléments soumise aux efforts, et que la partie non sollicitée, correspondant à la zone fissurée, n'intervient pas dans la déformation des éléments (hypothèse habituelle de calcul du béton armé).

Pour nous faire une idée du comportement de ce modèle mécanique idéal, nous examinerons pour simplifier le cas d'un empilage d'éléments rectangulaires de largeur b perpendiculairement au plan de flexion, et h parallèlement au plan de flexion.

II. ETABLISSEMENT DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE DE LA LIGNE MOYENNE DÉFORMÉE D'UN EMPILAGE D'ÉLÉMENTS RECTANGULAIRES

(Voir fig. 18)

- soit N la charge appliquée
 y la largeur de repos d'un élément sur l'élément contigu
 z la cote de l'élément

La contrainte maximale, sur la fibre la plus sollicitée est :

$$\sigma = \frac{2N}{by} \quad (48)$$

Le raccourcissement unitaire de cette fibre est :

$$\varepsilon = -\frac{\sigma}{E} = -\frac{2N}{by^2E} \quad (49)$$

si E est le module d'élasticité du béton, d'où la rotation élémentaire:

$$\frac{d\theta}{dz} = -\frac{\varepsilon}{y} = \frac{2N}{by^3E} \quad (50)$$

Mais, il résulte de la répartition triangulaire des contraintes que :

$$|\theta| = \frac{1}{3} \frac{dy}{dz} \quad \text{d'où} \quad \left| \frac{d\theta}{dz} \right| = \frac{1}{3} \frac{d^2y}{dz^2}$$

d'où
$$\frac{d^2y}{dz^2} = \varepsilon \cdot \frac{6N}{by^3E} \quad (51) \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \pm 1$$

Soit x la déformation transversale de la section par rapport à la ligne d'action de N

$$x = \frac{h}{2} - \frac{y}{3} \quad (52) \quad \text{avec} \quad y \leq h$$

d'où
$$\frac{d^2x}{dz^2} = \varepsilon' \cdot \frac{2N}{by^3E} \quad (53) \quad \text{avec} \quad \varepsilon' = \pm 1$$

Le problème posé se ramène donc à l'intégration de l'équation différentielle du 2nd ordre

$$y^3 \cdot y'' = \varepsilon \cdot A \quad (54)$$

où A est une constante et $\varepsilon = \pm 1$

Cette équation se ramène à une équation à variables séparées si l'on pose $y' = \rho$, et nous pouvons donc l'intégrer,

Soit σ_b^* la valeur de la contrainte maximale dans la section de cote $z=0$ et pour laquelle la largeur d'appui est y_0 .

$$y_0 = \frac{2N}{b \cdot \sigma_b^*} \quad (55)$$

on trouve aisément les solutions générales suivantes, exprimées en fonction de la variable auxiliaire u

$$u = \frac{y}{y_0} = \frac{\sigma_b^*}{\sigma_b} \quad (56)$$

1er cas : $\boxed{\varepsilon = +1}$

$$\frac{z}{y_0} = \pm \sqrt{\frac{E}{6\sigma_b^*}} \cdot f_1(u) \quad (57)$$

où $f_1(u) = \log_{\text{nép}} |\sqrt{u} + \sqrt{u-1}| + \sqrt{u(u-1)} =$
 $= -\log_{\text{nép}} |\sqrt{u} - \sqrt{u-1}| - \sqrt{u(u-1)} \quad (58)$

ou, sous une forme équivalente :

$$f_1(u) = \text{Arg sh } \sqrt{u-1} + \sqrt{u(u-1)} =$$

$$= \text{Arg ch } \sqrt{u} + \sqrt{u(u-1)} \quad (59)$$

(Cette solution convient au problème posé) (voir fig. 22a)

2ème cas $\boxed{\varepsilon = -1}$

$$\frac{z}{y_0} = \pm \sqrt{\frac{E}{6\sigma_b^*}} \cdot f_2(u) \quad (60)$$

avec

$$f_2(u) = \text{Arc sin } \sqrt{1-u} + \sqrt{u(1-u)} =$$

$$= \text{Arc cos } \sqrt{u} + \sqrt{u(1-u)} \quad (61)$$

(Cette solution, dans laquelle les lignes trigonométriques hyperboliques du cas précédent sont remplacées par les lignes trigonométriques habituelles correspond au cas de figure 22b)

Ayant déterminé la loi $z = F(u)$, on peut écrire la relation d'équilibre :

$$N = \frac{b y}{2} \sigma_b = \frac{b y \sigma_b^*}{2u} = \frac{3}{4} b (h-2e) \frac{\sigma_b^*}{u} \quad (62)$$

où e est l'excentricité à la cote z ,
 et en déduire la longueur de la zone fissurée. Celle-ci est en effet limitée à la section de cote z_1 telle que $y = h$ et $\sigma = \sigma_1$, et en valeur absolue

$$\frac{z_1}{h} = \sqrt{\frac{E}{6\sigma_b^*}} \cdot f_1(u) \quad (63)$$

Le tableau ci-après donne les valeurs numériques du coefficient

$$\sqrt{\frac{E}{6\sigma_b^*}}$$

correspondant aux valeurs σ_b^* limites

.../...

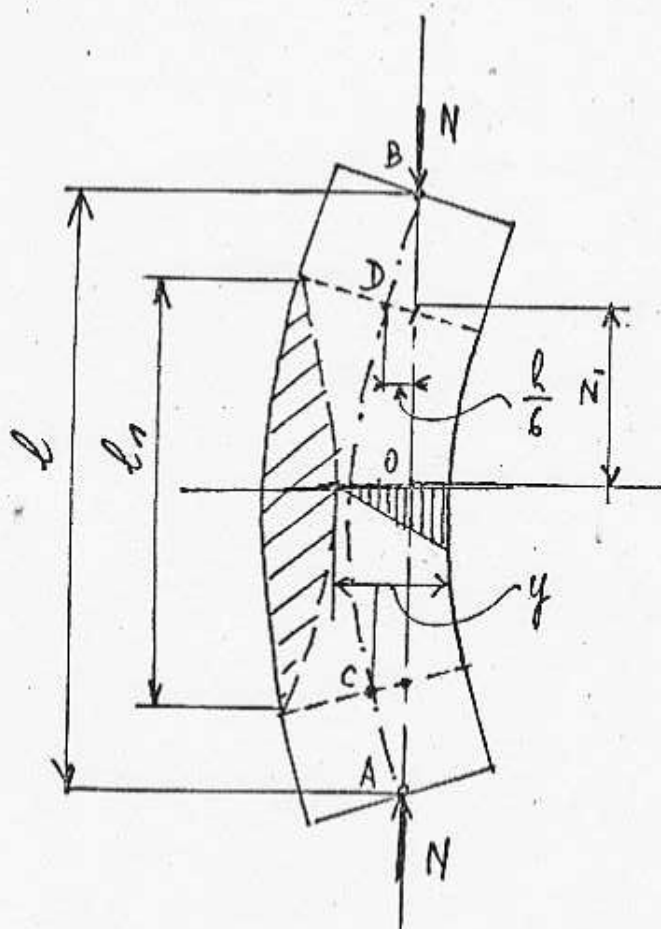


Fig 19 : Equilibre fléchi d'une pile axialement chargée de hauteur l (empilage).

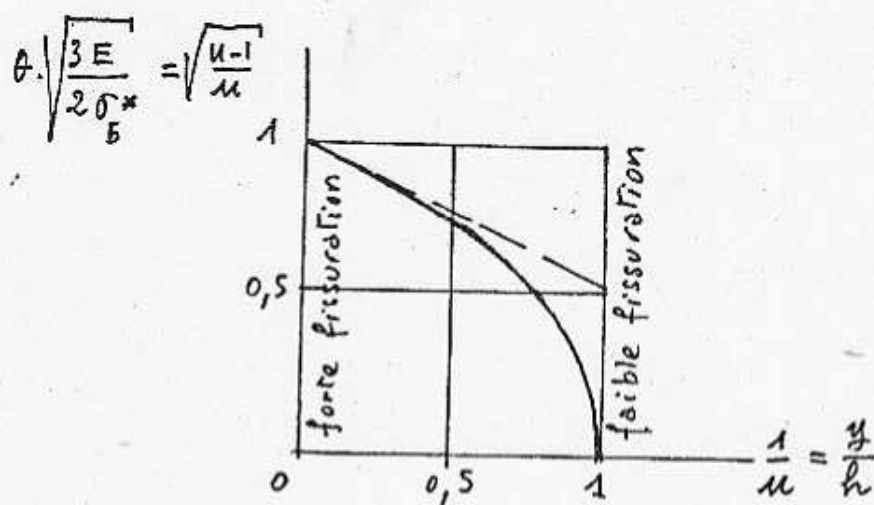


Fig 20 : Loi de variation de l'angle de rotation d'une section de cote z en fonction de $\frac{1}{u}$ (paramètre de "fissuration").

TABLEAU DES VALEURS DE

$$\sqrt{\frac{E}{6\sigma_b^*}}$$

-33-

$\frac{E}{\sigma_b^*}$	50.000 Kg/cm ²	100.000	150.000	200.000
50 Kg/cm ²	12,9	18,3	22,4	25,8
100	9,1	12,9	15,8	18,3
150	7,5	10,5	12,9	14,9
200	6,5	9,1	11,2	12,9
250	5,8	8,2	10	11,6
300	5,2	7,5	9,1	10,5
350	4,9	6,9	8,5	9,7
400	4,6	6,5	7,9	9,1
450	4,3	6,1	7,5	8,6

D'autre part, en supposant que la section correspondant à $z = 0$ prise pour origine ne tourne pas, on peut montrer facilement que la rotation d'une section où la contrainte maximale est σ_b , est donnée par l'expression simple :

$$\theta = \sqrt{\frac{2(\sigma_b^* - \sigma_b)}{3E}} \quad (64)$$

σ_b^* étant comme ci-dessus la contrainte maximale au bord de la section origine.

En particulier, l'angle de rotation de la section qui limite la zone fissurée est ainsi

$$\theta_1 = \sqrt{\frac{2(\sigma_b^* - \sigma_1)}{3E}} \quad (65) \text{ (Vni fig. 20)}$$

où

$$\sigma_1 = \frac{2N}{bh}$$

III. EQUILIBRE FLÉCHI D'UNE PILE AXIALEMENT CHARGÉE, DE HAUTEUR l (NON ARBEE).

Soit $l_1 = 2z_1$ la longueur de la zone "fissurée".

De part et d'autre de cette zone, on retrouve un équilibre fléchi avec déformée sinusoïdale (Axes AC et DB).

(fig. 21)

En écrivant l'égalité des angles de rotation de la section située à la limite de la zone fissurée, calculés pour "l'empilage" et pour les tronçons de sinusoïde qui l'encadrent, on aboutit à la relation suivante entre l , l_1 , u_1 et la contrainte moyenne ultime σ_c

$$\operatorname{tg} \left[\sqrt{\frac{3\sigma_c}{E}} \cdot \frac{l}{h} - \frac{f_1(u_1)}{u_1 \sqrt{u_1}} \right] = \frac{1}{2\sqrt{u_1-1}} \quad (66)$$

avec

$$N = bh\sigma_c = \frac{bh\sigma_1}{2} = \frac{bh\sigma_b^*}{2u_1} \quad (67)$$

.../...

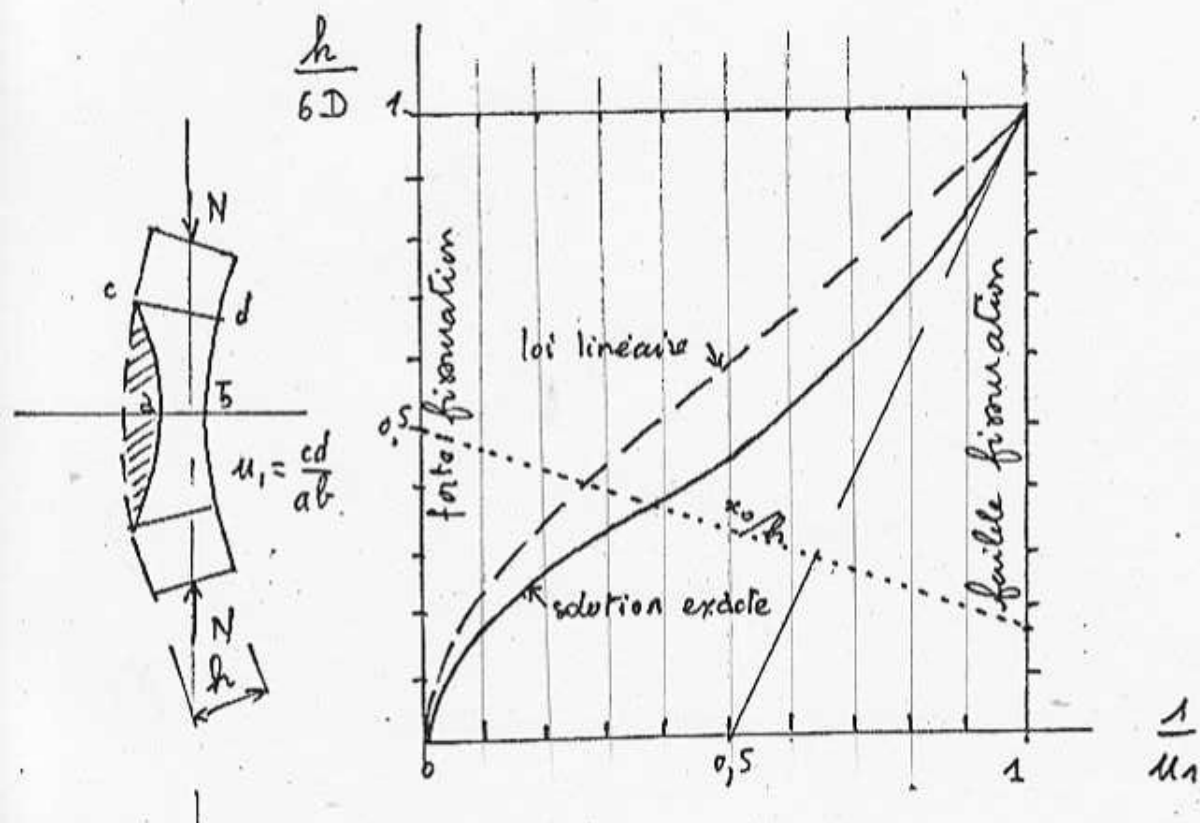
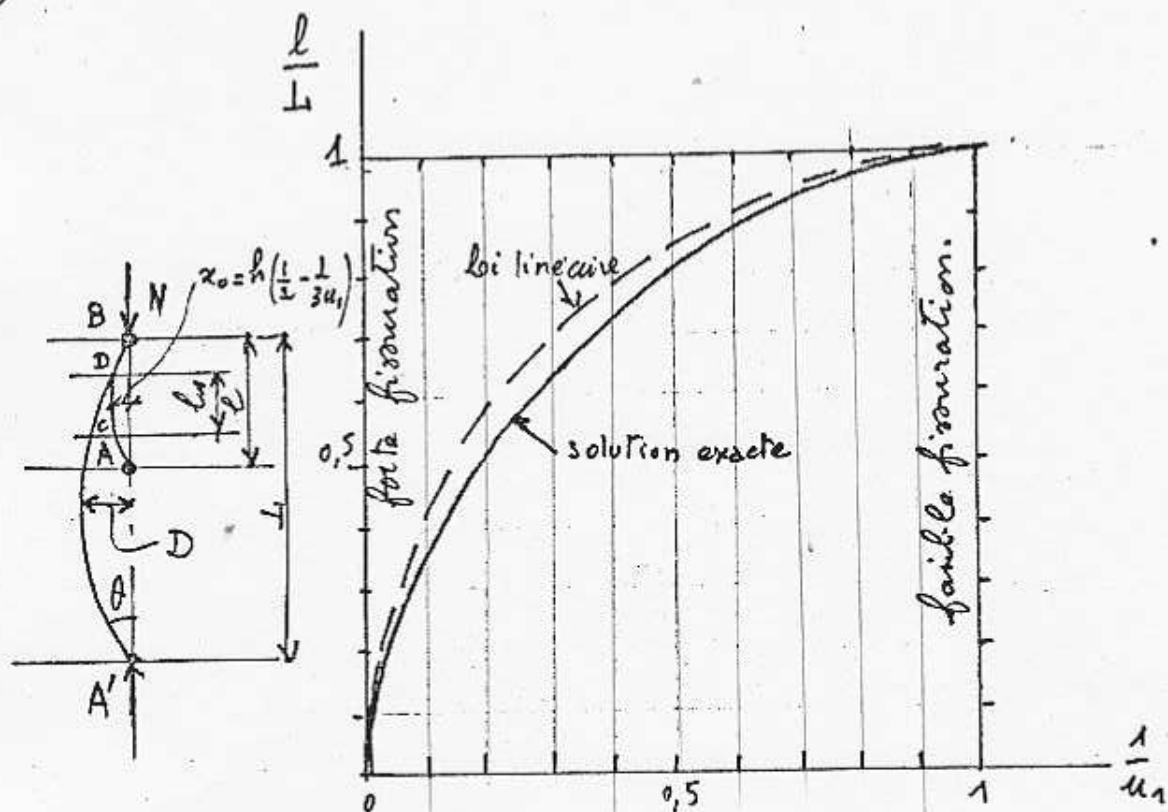


Fig 21: Courbes caractéristiques de la longueur L et de la déformation D de la colonne "équivalente".
 $D = \frac{2L}{\pi} \text{tg } \theta$

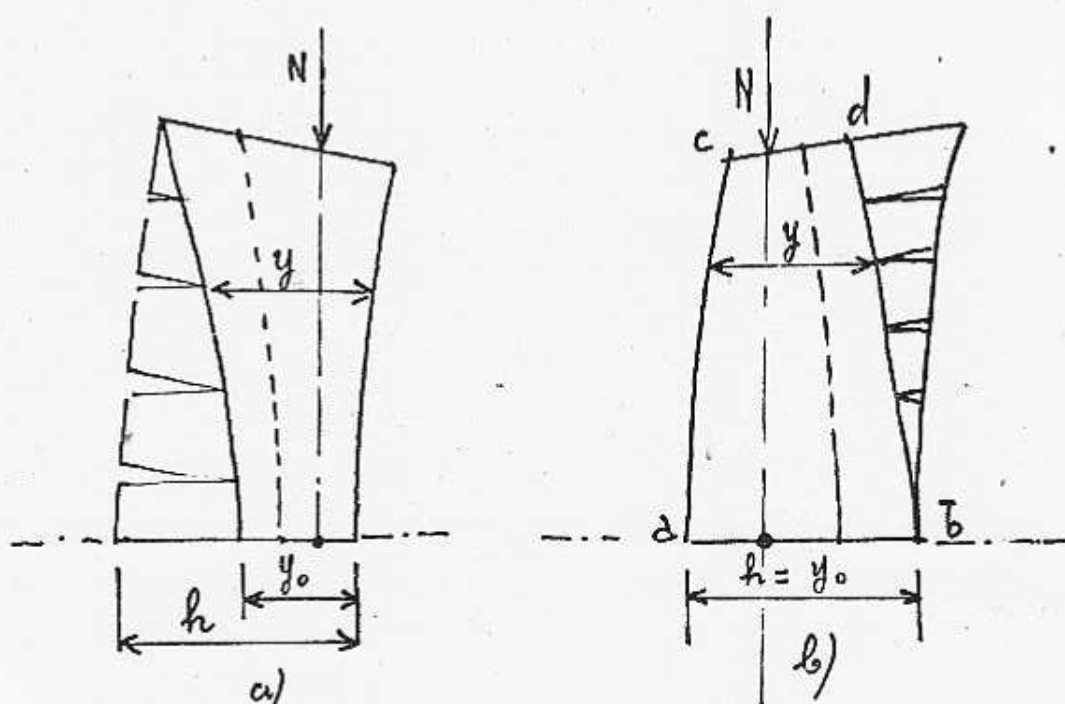


Fig 22 : Théorie des empilages élastiques.

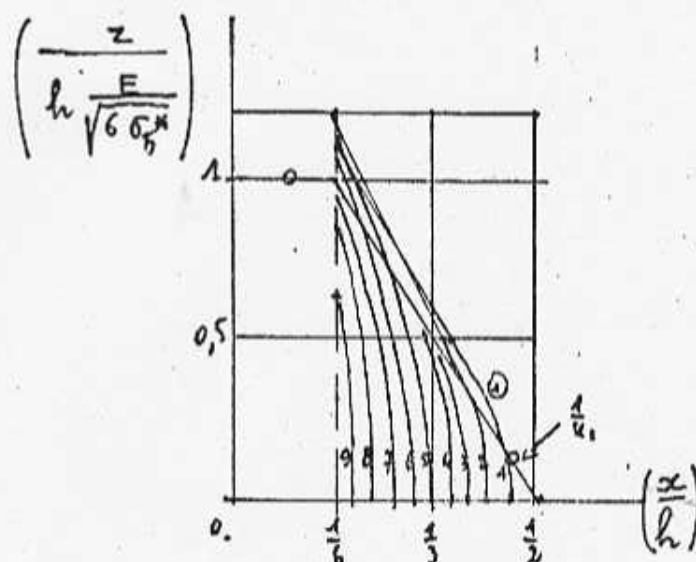


Fig 23 : Déformée de la pile dans la zone fissurée, en fonction de $\frac{1}{u_1}$.

Pour un élancement $\frac{l}{h}$ donné de la colonne la relation (66) donne la contrainte critique ultime σ_c de la pièce fissurée, en fonction du paramètre μ .
Posons $\mu_1 = \frac{\sigma_b^*}{2\sigma_c}$

$$\sigma_c = \frac{N}{bh} = \mu E \frac{h^2}{l^2} \quad (68)$$

Le coefficient μ caractérise le rapport de la charge critique de la pile après fissuration, en effet on a

$$\mu = \frac{\sigma_b^*}{2E} \left(\frac{l}{h}\right)^2 \cdot \frac{1}{\mu_1} \quad (69)$$

et pour $\mu = \frac{\pi^2}{12}$ on retrouve la charge critique d'EULER.

La relation entre μ_1 et σ_c donne

$$\mu = \frac{1}{3} \left[\operatorname{arctg} \frac{1}{2\sqrt{\mu_1-1}} + \frac{f(\mu_1)}{\mu_1\sqrt{\mu_1-1}} \right]^2 \quad (70)$$

Si l'on représente dans un diagramme $\mu = F\left(\frac{1}{\mu_1}\right)$ les expressions (69) et (70), la première est l'équation de droites Δ passant par l'origine, et la seconde celle d'une courbe qui peut-être construite une fois pour toutes (fig 25)

L'intersection de cette courbe et des droites Δ donne la solution du problème de la pile axialement chargée.

On voit que si l'élancement de la colonne, soit

$$\lambda = \frac{l}{h} = \frac{2l\sqrt{3}}{h}, \quad \text{est inférieur à } \pi \sqrt{\frac{2E}{\sigma_b^*}}$$

où σ_b^* est la contrainte limite d'écrasement du béton, la rupture se produit par écrasement du matériau.

Si l'élancement λ est supérieur à $1,14 \sqrt{\frac{E}{\sigma_b^*}}$

il se produit une bifurcation d'équilibre, suivie de la rupture du béton par écrasement.

Pour les valeurs intermédiaires de l'élancement comprises entre $\pi \sqrt{\frac{2E}{\sigma_b^*}}$ et $1,14 \sqrt{\frac{E}{\sigma_b^*}}$

l'équilibre fléchi est théoriquement possible, mais alors que pour une pièce homogène on aurait un équilibre quasi-indifférent, ici l'équilibre fléchi est évidemment instable, et une perturbation quelconque produira nécessairement l'écroulement de la pile.

On voit donc que pour éviter le flambement d'une pile axialement chargée il sera prudent de limiter son élancement λ à une valeur égale à :

$$\pi \sqrt{\frac{2E}{k \sigma_b^*}} \quad (71)$$

(k étant un coefficient de sécurité).

Par exemple, pour un mur en béton non armé, de résistance à la compression $\sigma_b^* = 450$ bars, on aurait, avec $k = 1$

$$\lambda = \pi \sqrt{\frac{2 \times 0,15 \times 10^6}{450}} = 81 \quad \text{ou} \quad \frac{l}{h} = \frac{\lambda}{2\sqrt{3}} = 33$$

et avec un coefficient de sécurité égal à 2

$$\frac{l}{h} = \frac{33}{\sqrt{3}} = 19$$

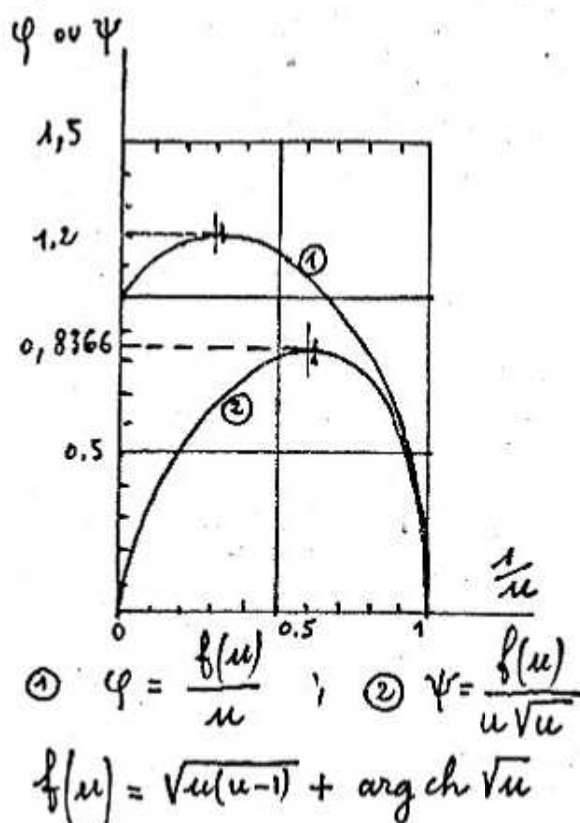


Fig 24 Fonctions $\varphi(u)$ et $\psi(u)$

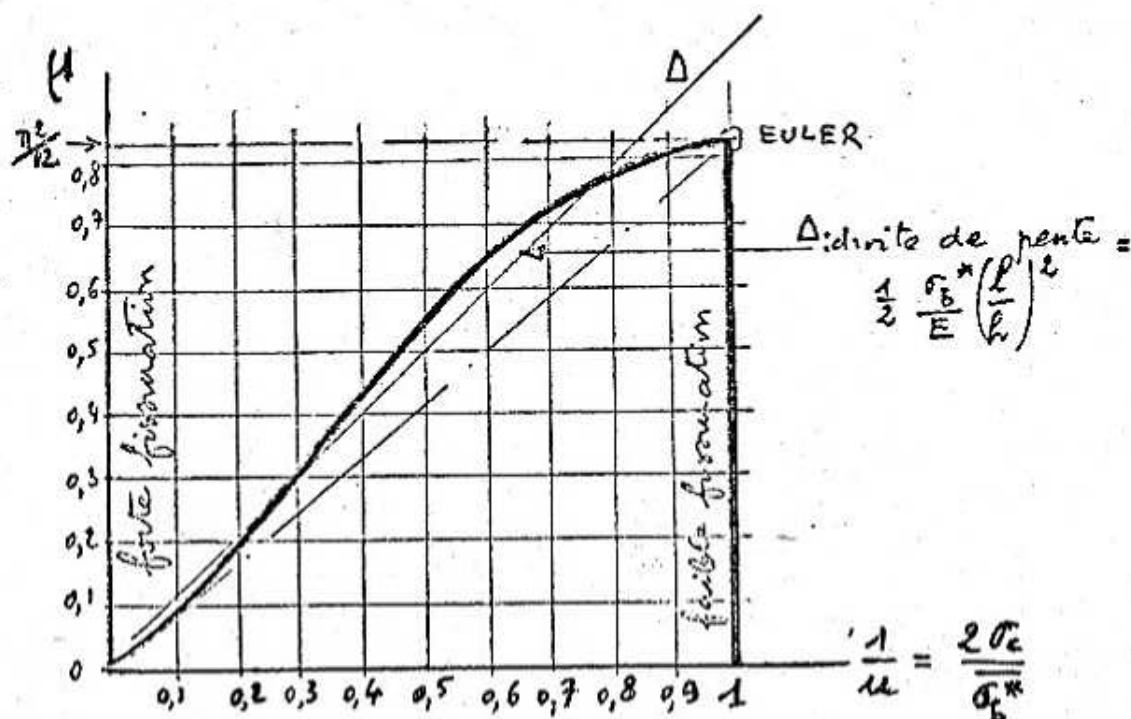


Fig 25 : Courbe du coefficient μ en fonction de $\frac{1}{u}$.

$$\mu = \frac{1}{3} \left[\operatorname{arctg} \frac{1}{2\sqrt{u-1}} + \frac{f(u)}{u\sqrt{u}} \right]$$

(Contrainte moyenne critique: $\sigma_c = \mu \cdot E \frac{h^2}{l^2}$)

REMARQUE 1 : La longueur relative de la zone fissurée, en cas d'équilibre fléchi est donnée en fonction de $\frac{1}{\mu_1}$ (ou du taux de fissuration $1 - \frac{1}{\mu_1}$), par le tableau suivant :

$1/\mu_1$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$\frac{l_1}{l}$	0,667	0,684	0,685	0,675	0,659	0,636	0,604	0,556	0,437	0,31	0

Pour une fissuration importante ($1 - \frac{1}{\mu_1} > 0,5$) le rapport $\frac{l_1}{l}$ reste voisin de $2/3$ et pratiquement constant. Ce résultat paraît bien vérifié par les essais.

REMARQUE 2 : Les relations indiquées plus haut donnent une représentation paramétrique de la courbe déformée dans la zone fissurée, qui peut ainsi être construite. On constate qu'elle s'écarte notablement d'une sinusoïde lorsque $\mu_1 = h/y_0$ tend vers l'infini, cas qui correspond à l'apparition d'une rotule sur le bord de la section la plus sollicitée.

REMARQUE 3 : On peut rendre compte de l'équilibre de post-flambage au moyen de la solution particulière de l'équation différentielle $y^2 \cdot y'' = A$ définie par la relation :

$$y = 3 \sqrt[3]{\frac{N}{bE}} \cdot \left(\frac{y_0}{3} \sqrt{\frac{2E}{3\sigma_b^*}} + z \right)^{2/3}$$

qui correspond à la longueur fissurée :

$$z_1 = \frac{l}{3\sqrt[3]{\mu}} \left(1 - \frac{1}{\mu_1 \sqrt{\mu_1}} \right)$$

REMARQUE 4 : On peut substituer à la solution exacte de l'équation différentielle reliant z et y diverses solutions approchées :

- loi linéaire

$$y = y_0 + m z$$

- loi hyperbolique

$$\frac{y^2}{y_0^2} = (\mu_1^2 - 1) \frac{z^2}{z_1^2} = 1$$

- loi parabolique

$$y = \frac{h}{\mu_1} \left(1 + \frac{\mu_1 - 1}{z_1^2} \cdot z^2 \right)$$

- loi sinusoïdale

$$y = h - (h - y_0) \cos \frac{\pi z}{z_1}$$

On obtient avec ces lois approchées, des expressions de la demi-longueur fissurée z_1 et de la rotation θ_1 à l'extrémité de la zone fissurée en fonction de $1/\mu_1$ qui ont sensiblement la même allure qu'avec le modèle théorique choisi (voir figure 26)

On peut en conclure que l'erreur due au choix du modèle n'aura qu'une influence limitée sur les conclusions que l'on pourra tirer de l'étude théorique. Cette constatation constitue une première justification de la théorie.

IV EMPILAGE ELASTIQUE SOUMIS A UNE CHARGE N AVEC UNE EXCENTRICITE a

1er Cas : $\frac{1}{6} \leq \frac{a}{h} \leq \frac{1}{2}$

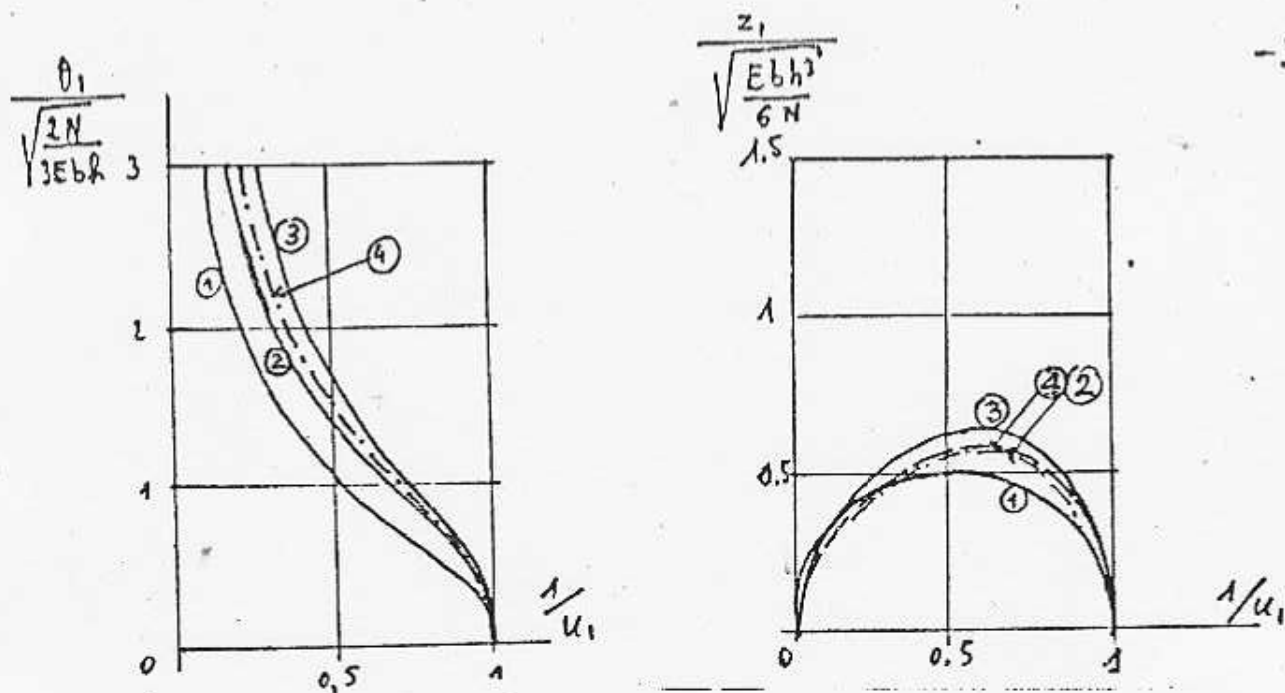


Fig 26 Valeurs de la rotation θ_1 de la section limitant la zone fissurée, et de la cote z_1 de cette section avec diverses lois de déformation.

① loi linéaire: $z_1, \theta_1 = \frac{h}{3} \left(1 - \frac{1}{u_1}\right)$

② loi hyperbolique: $z_1, \theta_1 = \frac{h}{3} \left(1 - \frac{1}{u_1^2}\right)$

③ loi parabolique: $z_1, \theta_1 = \frac{2h}{3} \left(1 - \frac{1}{u_1}\right)$

④ solution "exacte": $z_1, \theta_1 = \frac{h}{3} \frac{\phi(u_1)}{u} \sqrt{1 - \frac{1}{u_1}}$

La charge N est appliquée, dans la section d'extrémité, en dehors du tiers central.

Le degré de fissuration étant défini comme précédemment, par l'expression $(1 - 1/\mu_1)$, soit μ_0 la valeur du paramètre μ correspondant à l'extrémité de la pièce On a :

$$\frac{a}{h} = \frac{1}{2} - \frac{\mu_0}{3\mu_1} \quad (72)$$

La colonne est entièrement fissurée sur toute sa longueur l

Soit l_1 tel que $\frac{l_1}{2h} = \sqrt{\frac{E}{6\sigma_b^*}} \cdot \frac{f(\mu_1)}{\mu_1}$ avec $l_1 > l$

On a $\frac{l}{2h} = \sqrt{\frac{E}{6\sigma_b^*}} \cdot \frac{f(\mu_0)}{\mu_1}$

L'excentricité de la charge dans la section médiane prise pour origine est x_0 , telle que

$$\frac{x_0}{h} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3\mu_1} \quad (73)$$

et le "coefficient d'amplification" de l'excentricité est donc :

$$\chi = \frac{a+e}{a} = \frac{x_0}{a} = \frac{3 - 2/\mu_1}{3 - 2\mu_0/\mu_1}$$

En particulier, si l'excentricité de la charge dans la section extrême est $a = h/6$, on a $\chi_1 = 3 - \frac{2}{\mu_1}$
(On voit que $\chi_1 \leq 3$)

Dans le cas général : $\frac{l}{l_1} = \frac{f(\mu_0)}{f(\mu_1)}$ (74)

et l'on peut montrer que la charge ultime N est alors donnée par la relation :

$$\frac{N}{N_c} = 4 \frac{f_1^2(\mu_0)}{\pi^2 \cdot \mu_1^3} \quad (75)$$

En éliminant μ_1 et μ_0 entre les formules (73) et (75) on définit pour toute valeur de l'excentricité relative a/h une fonction implicite $\chi \left(\frac{N}{N_c} \right)$

A toute valeur du paramètre $1/\mu_1$, on peut faire correspondre dans un diagramme rectangulaire les courbes donnant le rapport N/N_c en fonction de l'excentricité relative a/h

(fig 27) Pour un rapport donné E/σ_b^* , on peut tracer, dans le même système d'axes les courbes représentatives donnant le rapport N/N_c pour diverses valeurs de l'élancement.

Pour un béton de bonne qualité, tel que $(E/\sigma_b^*) \sim 350$ on obtient les courbes indiquées sur la figure 28 On voit que la charge portante de l'empilage décroît très rapidement dès que le point d'application de la charge sort des limites du tiers moyen.

2ème Cas : $\frac{a}{h} \leq \frac{1}{6}$

La zone fissurée n'occupe qu'une partie de la hauteur totale de la colonne.

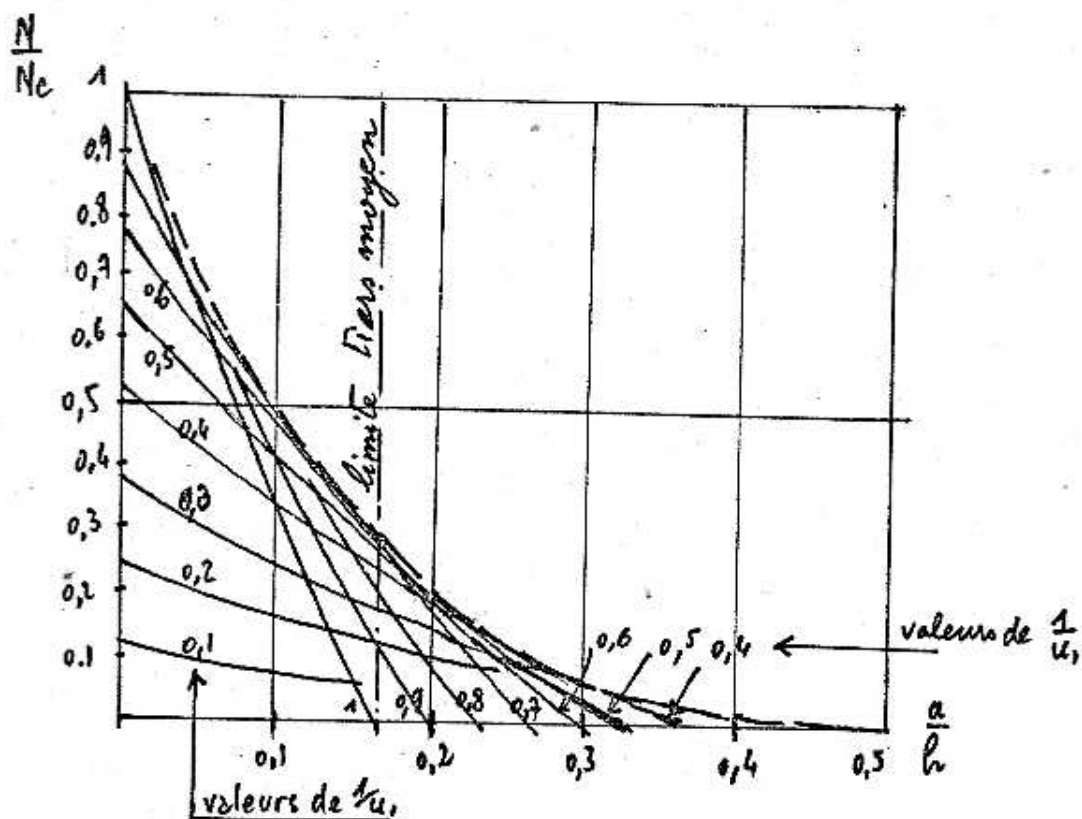


Fig 27 Variation de $(\frac{N}{N_c})$ en fonction de l'excentricité relative $\frac{a}{h}$
pour diverses valeurs de $\frac{1}{u_1}$

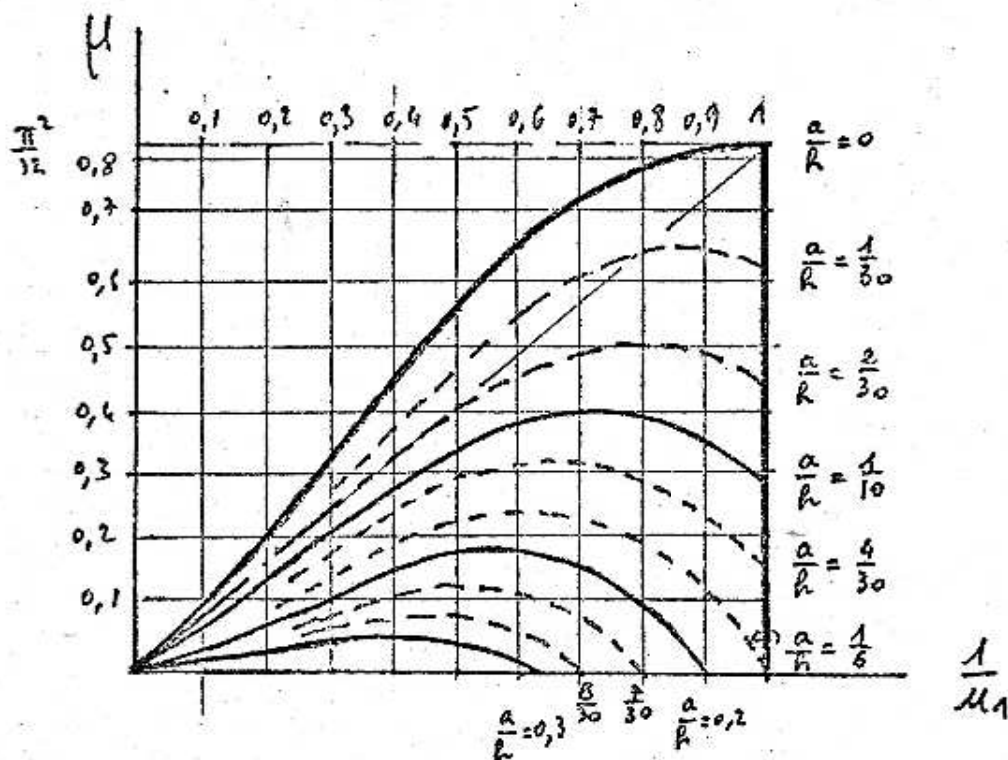


Fig 29: Courbes du coefficient μ en fonction de $\frac{1}{u_1}$
pour diverses valeurs de l'excentricité relative $\frac{a}{h}$
dans le cas d'un "empilage".

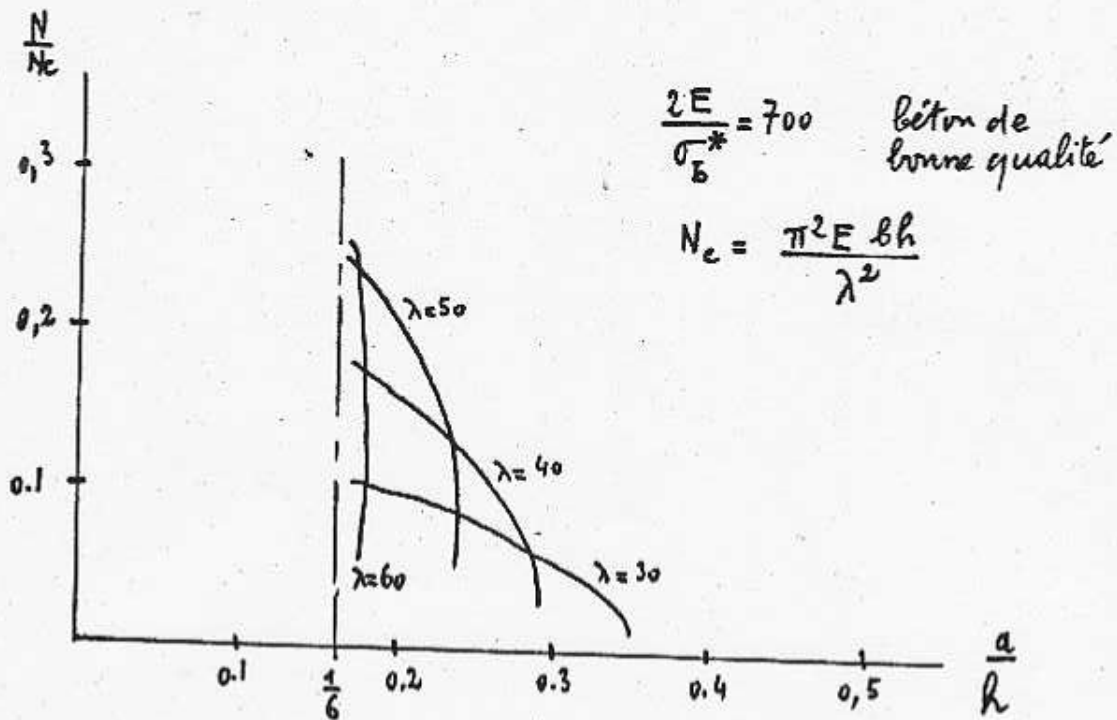


Fig 28 Variation de N/N_c en fonction de l'excentricité relative $\frac{a}{h}$
 pour diverses valeurs de l'élongement λ
 (cas où la charge N est appliquée à l'extérieur du tiers moyen).

A partir des équations d'équilibre de la zone fissurée, et des arcs de sinuséide qui l'encadrent, il est possible de prolonger les courbes donnant le rapport de la charge ultime N à la charge critique d'EULER N_c pour $1/\mu_1$ donné, dans le domaine des valeurs de $\frac{a}{h} \leq \frac{1}{6}$ (fig 27).

Enfin, on peut construire, comme nous l'avons déjà vu dans le cas particulier de la colonne axialement chargée ($\frac{a}{h} = 1$) les courbes représentant la variation du rapport $\mu = \frac{N}{N_c}$ de la charge ultime à la charge critique d'EULER, en fonction de $\frac{1}{\mu_1}$ (c'est à dire du degré de fissuration $1 - \frac{a}{h_1}$) pour toute valeur donnée de l'excentricité relative $\frac{a}{h}$. (fig 29)

L'intersection d'une courbe $\frac{a}{h}$ avec la droite de pente $\frac{\sigma_b^* \lambda^2}{24E} = \sqrt{2} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_b^* (\frac{l}{h})^2}{E}$ donne la solution du problème de l'équilibre flechi de l'empilage d'élançement $\lambda = 2\sqrt{3} \frac{l}{h}$.

Portons en abscisse dans un diagramme rectangulaire les valeurs du paramètre $\frac{1}{2} \frac{\sigma_b^* (\frac{l}{h})^2}{E}$ et en ordonnée celles du coefficient $\mu = \frac{\pi^2}{12} \frac{N}{N_c}$. On obtient le réseau des courbes de la figure 30 graduées en fonction de l'excentricité relative $\frac{a}{h}$.

Ces courbes comprennent, comme on pouvait s'y attendre, un segment de la droite OA passant par l'origine, de longueur variable, suivi d'un arc tel que EF ascendant, suivi d'un arc plongeant FQ .

Le segment OE correspond à l'équilibre non fissuré, l'arc EF à un équilibre fissuré stable et l'arc EQ à un équilibre instable.

Il est intéressant de comparer ces courbes à celles que l'on obtient en portant dans le même système de coordonnées les valeurs des paramètres $\frac{1}{2} \frac{\sigma_b^* (\frac{l}{h})^2}{E}$ et $\mu = \frac{\pi^2}{12} \frac{N}{N_c}$ calculées d'après les valeurs limites données par les tables établies d'après la méthode de Mr. FAESSEL (1), pour les poteaux non armés (à pourcentage mécanique nul). (fig 31)

On observe une excellente concordance des courbes correspondant aux mêmes valeurs de l'excentricité relative, dans la partie du diagramme proche de l'origine.

Par contre, on constate que pour des valeurs élevées de l'élançement, la théorie des empilages donne une charge ultime nulle (l'empilage perdant toute stabilité), tandis que la colonne calculée par la méthode de Mr. FAESSEL donnerait une charge non nulle.

(1) Voir : Tables d'états limites ultimes des poteaux en béton armé par P. FAESSEL - J.R. ROBINSON et A. MORISSET éditées par la Société de Diffusion des techniques du Bâtiment et des travaux publics 9, rue La Pérouse PARIS 16ème

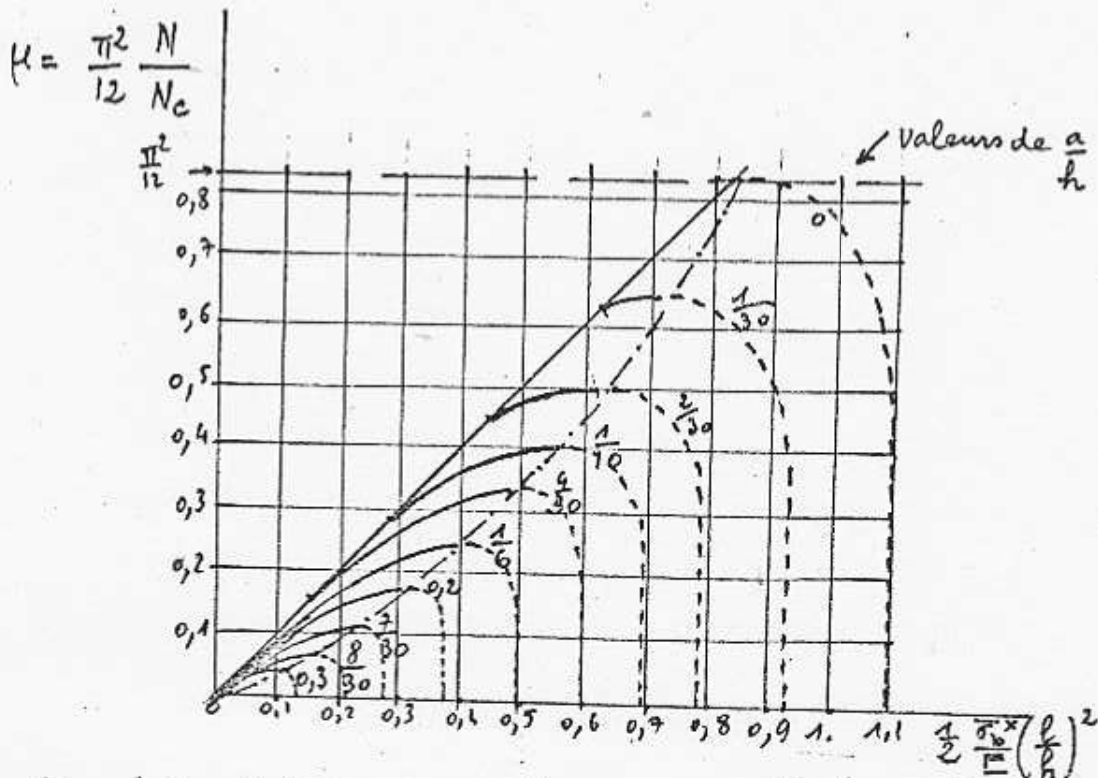


Fig 30 : Valeurs du coefficient $\mu = \frac{\pi^2}{12} \frac{N}{N_c}$ en fonction du paramètre $\frac{1}{2} \frac{\sigma_b^*}{E} \left(\frac{l}{h}\right)^2$ et de l'excentricité relative $\frac{a}{h}$ pour un empilage élastique chargé en tête.

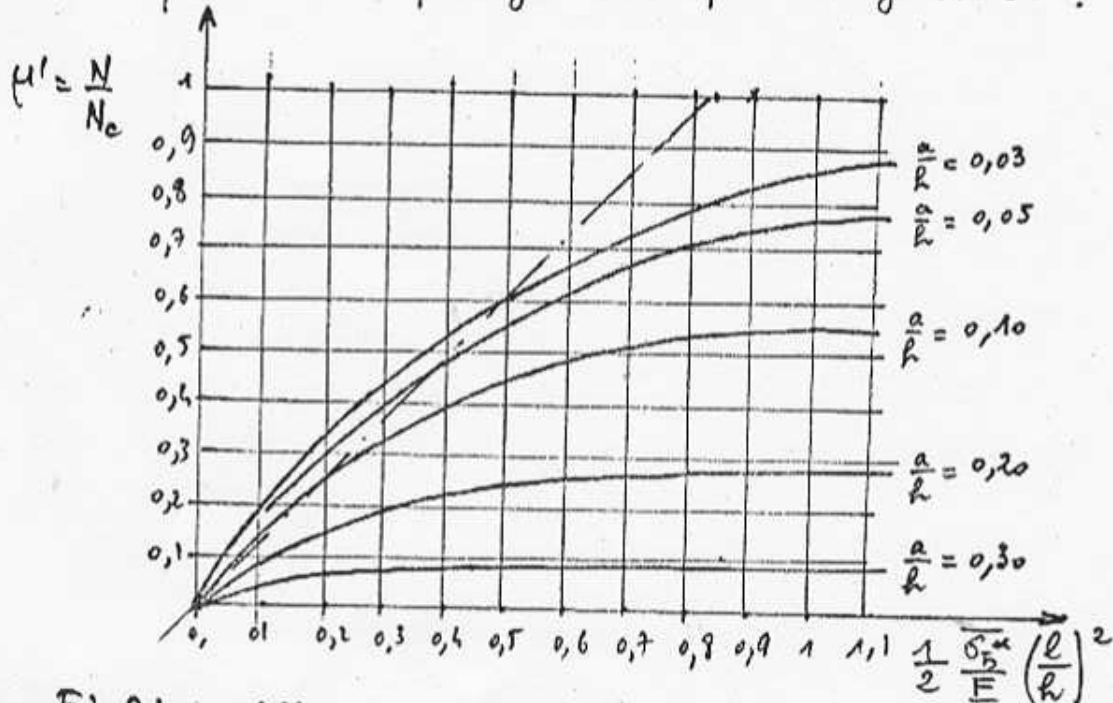


Fig 31 : Allure des courbes représentant le coefficient $\mu' = \frac{N}{N_c}$, en fonction du paramètre $\frac{1}{2} \frac{\sigma_b^*}{E} \left(\frac{l}{h}\right)^2$ pour un poteau en béton non armé, d'après les tables de FAESSEL, ROBINSON et MORISSET.

Ce résultat provient de l'hypothèse retenue dans cette méthode pour la forme, sinusoïdale, de la déformée.

Nous tirons de cette comparaison une justification de l'intérêt du modèle proposé, et la suggestion qu'il ne faudra pas, en pratique, descendre, pour les poteaux en béton, au dessous d'un pourcentage minimal d'armatures, qui dépendra de l'élançement, et qu'il y aura lieu de préciser, d'après les résultats d'essais.

On peut représenter l'effet de l'excentricité sur la stabilité d'un empilage élastique par le diagramme ci-contre (fig 32).

A chaque valeur de $\alpha = \frac{1}{2} \frac{\sigma_c}{E} \left(\frac{l}{h}\right)^2$ correspond une courbe $\frac{N}{N_c} = f\left(\frac{a}{h}\right)$. Cette courbe comprend un segment de droite horizontal tel que $m m$ correspondant à l'état non fissuré (indépendant de l'excentricité), prolongé par une courbe descendante telle que $n p$.

Ces courbes sont les projections sur le plan $\left(\frac{a}{h}, \frac{N}{N_c}\right)$ des intersections par des plans parallèles à ces axes, d'une certaine surface qui limite le "domaine de stabilité ultime" du poteau en fonction de la charge, de l'excentricité et du paramètre α qui regroupe l'influence de l'élançement et celle de la résistance du béton à la compression.

On pourra donc, à partir de cette surface définir la charge limite admissible de la colonne en fonction de la résistance admissible du béton à la compression.

Nous verrons plus loin comment il est possible d'introduire dans les formules l'influence de la résistance du béton à la traction.

V PASSAGE DE LA THEORIE SIMPLIFIEE DES EMPILAGES ELASTIQUES A CELLE DES POTEAUX EN BETON ARME :

Considérons, comme nous l'avons proposé dans le sous titre "Considérations générales", la colonne d'armatures isolée du béton.

Soit I_a le moment d'inertie de la section d'aciers pour une armature symétrique de section totale $2\omega_a$, la distance entre les aciers étant αh avec $\alpha < 1$.

La charge critique d'EULER est

$$N_{ac} = \frac{\pi^2 E I_a}{l^2} = \frac{\pi^2 E \alpha^2 \omega_a h^2}{2 l^2} \quad (76)$$

et dans l'équilibre fléchi la contrainte de compression des armatures est

$$\sigma_{ac} = \frac{\pi^2}{4} E_a \alpha^2 \left(\frac{h}{l}\right)^2 \quad (77)$$

$$\mu' = \frac{N}{N_c}$$

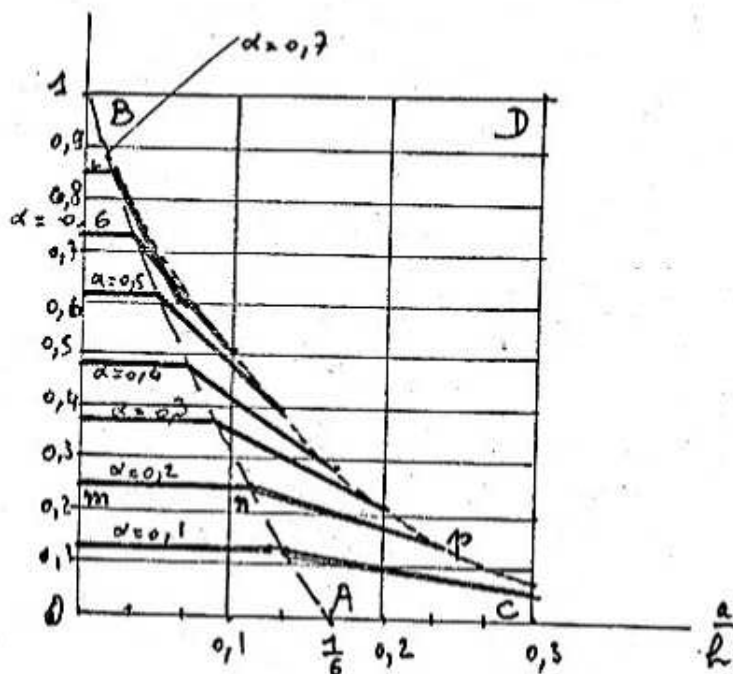


Fig 32: Effet de l'excentricité de la charge sur la stabilité d'un "empilage" chargé en tête

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_b^*}{E} \left(\frac{l}{h} \right)^2 = \text{cte}$$

zone OAB : Condition d'EULER avec limitation de la charge en fonction de σ_b^*

zone ABC : Equilibre élastique fissuré

zone BCD : Charge portante nulle (aucun équilibre n'est possible)

et la contrainte fictive correspondante du béton serait :

$$\sigma_{bc}^* = \frac{\pi^2}{4} E_b \alpha^2 \left(\frac{h}{l}\right)^2 \quad (48)$$

Admettons que cette contrainte soit la même que la contrainte moyenne $\sigma_b^*/2u$, du béton enrobant les armatures, dans la section fissurée la plus sollicitée, au moment de la rupture, (cela serait vérifié si l'on avait $(\pi^2/4)\alpha^2 = 1$ soit $\alpha \approx 0,635$), on obtiendrait comme précédemment la solution, pour l'équilibre de l'empilage élastique associée à la cage d'armatures, en prenant l'intersection de la droite de pente $\frac{6E_b \lambda^2}{24E}$ dans le diagramme ($\mu = \frac{\pi^2}{12} \frac{N}{N_c}$ et $\frac{1}{u}$) avec une courbe obtenue en faisant subir à la courbe d'excentricité a/h , une affinité de rapport $i_1/(i_1 + m i_2)$ disposée dans le diagramme comme indiqué sur la figure suivante : (fig 33).

où i_1 est l'inertie de la section de béton non armé, i_2 l'inertie de la section d'aciers et $(1 + m i_1)$ l'inertie de la section homogénéisée (avec $m = E_a/E_b$). On voit sur le graphique que la part de la charge critique qui correspond à la cage d'armatures n'est pas affectée par le degré de fissuration $(1 - \frac{a}{h})$ ce qui, en première approximation est conforme à la réalité.

On réalise ainsi, en quelque sorte, une interpolation entre les deux cas limites constitués par la colonne de béton non armé et la colonne formée de ses armatures, au moyen d'une construction géométrique simple que l'on sait valable dans ces deux cas limites.

Cette généralisation de la solution du problème des empilages élastiques permet d'ores et déjà de prévoir, au moins qualitativement, le comportement sous charge des poteaux en béton armé de section rectangulaire. Elle précise divers paramètres intéressants pour les études de similitude. Enfin, assortie de coefficients correctifs, (à déterminer par l'expérience), elle apporte un moyen de construire des formules "semi-empiriques", tenant mieux compte de la nature des phénomènes que des formules purement empiriques.

Bien qu'un travail considérable ait déjà été réalisé dans ce domaine et qu'il existe maintenant d'excellentes tables et programmes de calcul, nous pensons qu'il n'est pas inutile d'en comparer les résultats avec ceux qui peuvent être obtenus par d'autres voies. En particulier, un point qui nous paraît très important est celui de la fixation, réglementaire des quantités minimales d'armatures en fonction des divers paramètres entrant en jeu dans les problèmes variés qui peuvent se poser aux constructeurs, et pour lesquels il n'est pas inutile de disposer de modèles physiques simplifiés.

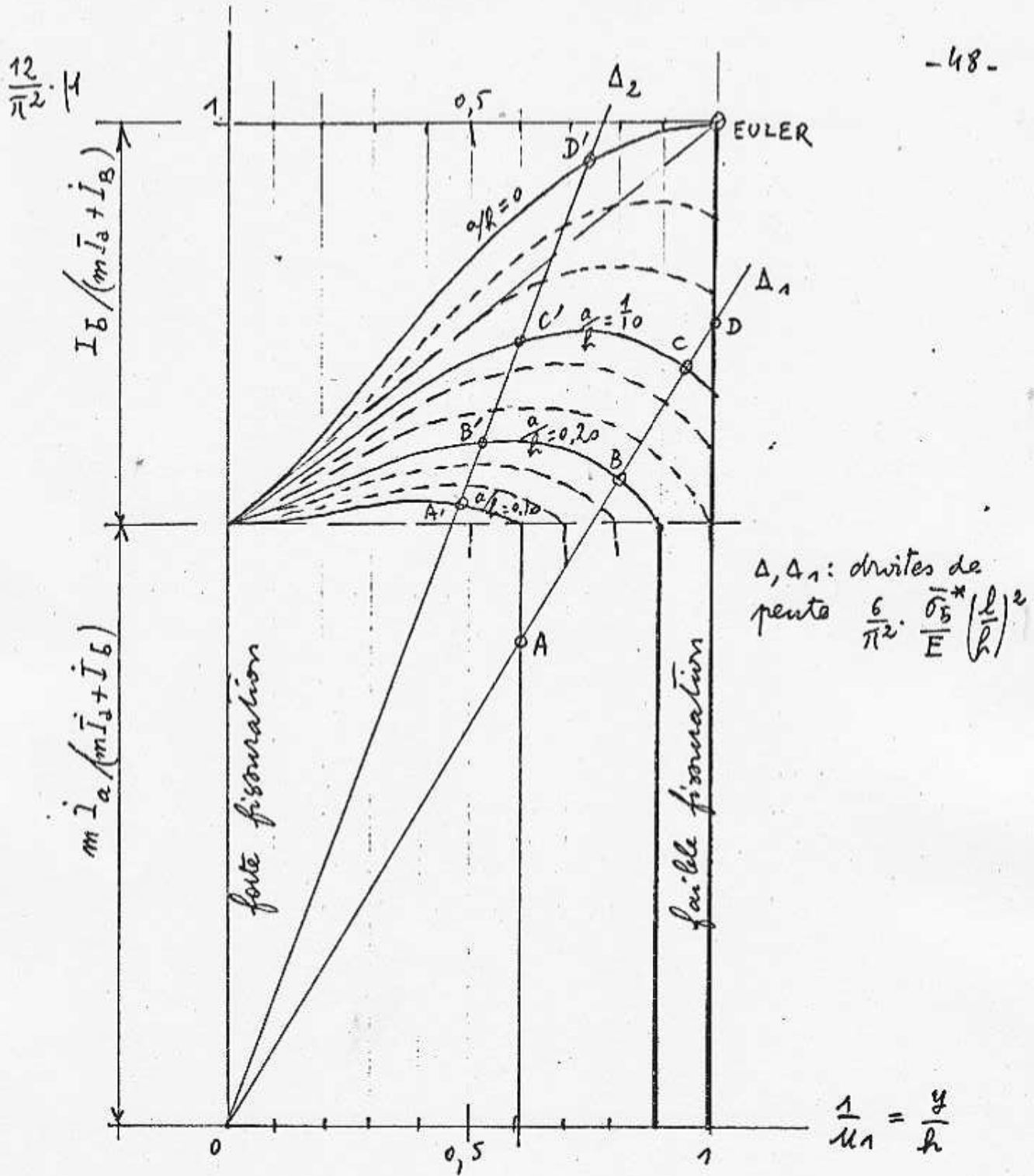


Fig 33. Détermination graphique de la charge ultime

$$\sigma_c = \mu \cdot \frac{E h^2}{l^2}$$

$$\frac{N}{bh} = \frac{1}{2} \sigma_b^* \cdot \frac{1}{\alpha_1} = \frac{1}{2} \sigma_b^* b y_0 \rightarrow \mu = \frac{1}{2} \frac{\sigma_b^*}{E} \frac{1}{\alpha_1} \left(\frac{l}{h} \right)^2$$

Nous avons procédé à la vérification du modèle proposé pour deux séries de poteaux de $9 \times 12,7$ cm axialement chargés ayant des pourcentages d'armature de 1,5% et 2,5% pour lesquels nous connaissions des résultats d'essais effectués avec divers bétons.

Nous avons dû calculer la valeur du module du béton des essais d'après les valeurs indiquées de la résistance à l'écrasement sur cylindres (comprise entre 200 et 400 Kg/cm²).

Les résultats du calcul de la charge ultime par la théorie simplifiée et ceux des essais concordent de façon satisfaisante, eu égard à la dispersion assez élevée de ces derniers. D'ailleurs, la schématisation apportée par le modèle revient à négliger certaines liaisons d'interaction entre les deux colonnes fictives considérées, et joue dans le sens de la sécurité ce qui est évidemment très intéressant sur le plan pratique.

VI PRISE EN COMPTE DE LA RESISTANCE DU BETON A LA TRACTION :

a) Cas de la colonne non armée :

On remplace le diagramme triangulaire par le diagramme représenté sur la figure 34.

On montre aisément que l'équation différentielle du problème :

$$y^2 \cdot y'' = \frac{6N}{El}$$

doit être remplacée par l'équation :

$$y^2 \cdot y'' = \frac{6N}{El} + \frac{6\sigma_b y}{El} \quad (79)$$

en appelant σ la résistance à la traction du béton

En posant $y' = p$ et en intégrant, on a

$$p^2 = \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = \frac{6\sigma_b^*}{E} \left(1 - \frac{1}{u}\right) + 12 \frac{\sigma}{E} \log_{\text{nep}} u \quad (80)$$

avec

$$u = \frac{y}{y_0} ; \sigma_b^* = \frac{2N}{by_0} ; u_1 = \frac{h}{y_0} \quad (1 < u < u_1)$$

Au voisinage de $u=1$, $\log_{\text{nep}} u \sim 1 - \frac{1}{u}$ et l'équation différentielle ci-dessus peut-être remplacée, en première approximation par :

$$p^2 = \frac{6(\sigma_b^* + 2\sigma)}{E} \left(1 - \frac{1}{u}\right) \quad (81)$$

avec

$$\sigma_b^* = 2u_1 \sigma_b$$

tout se passe comme si la charge était accrue du terme $\sigma_b y$ et que la contrainte limite dans la section la plus sollicitée était de $\sigma_b^* + 2|\sigma|$ au lieu de σ_b^*

Autrement dit, la résistance à la traction σ peut

être introduite dans les calculs, en première approximation, comme on le ferait, en mécanique des sols, pour la cohésion, grâce au "théorème des états correspondants", de Mr. CAQUOT, théorème qui, nous l'avons montré (1) est un cas particulier du principe de superposition.

VII CAS DES POTEaux "PRECONTRAINTS"

a) Empilages et poteaux non armés :

Il est facile de montrer que si un poteau est soumis à une charge N et à une précontrainte P centrée l'état d'équilibre fissuré satisfait encore à l'équation différentielle :

$$y'' = \frac{6N}{by^2}$$

et on vérifie qu'une précontrainte centrée ne modifie pas la loi de déformations de l'empilage. Mais, les conditions aux limites sont évidemment changées. Pour $z=0$, on a en effet

$$\sigma^* = \frac{2(P+N)}{by_0} \quad (82)$$

d'où, avec les notations déjà utilisées :

$$\frac{dz}{y_0} = \sqrt{\frac{E}{6\sigma^*}} \left(1 + \frac{P}{N}\right) \cdot \sqrt{\frac{u}{u-1}} \cdot du \quad (83)$$

Tout se passe comme si la contrainte limite du béton dans la section la plus sollicitée était réduite dans le rapport $\frac{N}{N+P}$.

b) Poteaux en béton armé, précontraints

On peut conclure de ce qui précède qu'une précontrainte additionnelle sera favorable pour des charges modérées, notablement inférieures à la charge critique, mais qu'elle deviendra nuisible si la charge de la colonne croît et se rapproche de la charge ultime, car la compression supplémentaire due à la précontrainte s'ajoute évidemment à la contrainte de compression due à la charge. C'est bien ce que montre l'expérience.

VIII PRISE EN COMPTE DU POIDS PROPRE DANS LA THEORIE DE LA STABILITE ELASTIQUE DES EMPILAGES

Pour un empilage élastique soumis seulement à son poids propre, l'équation différentielle de l'équilibre s'écrit, (avec les mêmes notations que précédemment) :

$$y^2 \cdot y'' = \varepsilon \cdot \frac{6\omega h}{E} (l-z) \quad (84) \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

où ω est le poids volumique du matériau

Posons $y' = p \rightarrow y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$

d'où $\frac{dy}{y^2} = \frac{E}{6\omega h} \cdot \frac{p \cdot dp}{(l-z)}$

avec

$$dy = p \cdot dz$$

d'où $dp = \frac{6\omega h (l-z) dz}{E \cdot y^2} \quad (85)$

(1) Voir à ce sujet : C. BOURDON: Problèmes d'Elasticité et de poussée des terres. Le Génie Civil n° 7 Juillet Août 1967, pages 541 à 544

(84) est une équation de PAINLEVE - Van Valingen, T. 2

En remplaçant les différentielles dz et dp par des accroissements finis Δz et Δp on peut déterminer facilement, de proche en proche la forme de la déformée, puisque :

$$x = \frac{1}{2} - \frac{y}{3}$$

IX : APPLICATIONS ET PERSPECTIVES :

Au stade actuel des recherches les théories et méthodes de calculs que nous avons décrites apportent sinon la solution définitive, au moins des approximations parfois très précises des problèmes relatifs aux pièces rectilignes et dans tous les cas, la possibilité d'analyser les mécanismes qui conditionnent le comportement sous charge des poteaux en béton armé. Jointes aux programmes très élaborés de structure dont nous disposons à l'heure actuelle, tel que le programme "ZEUS" de la SOCOPEC (1), je ne doute pas qu'elles contribuent à donner aux ingénieurs les moyens de résoudre dans les meilleures conditions économiques les difficiles problèmes relatifs au flambement des ossatures et à cerner de plus près les domaines de validité des formules introduites dans les règlements.

Mais, comme nous allons le voir, ces résultats sont susceptibles également d'être généralisés aux murs, aux plaques chargés dans leur plan, et même aux coques.

Pour aborder ces problèmes, il nous faut tout d'abord revenir à la théorie du "flambement des pieux" dans un milieu élastique. Il est bien entendu que nous n'abordons pas ici ce problème sous l'angle du mécanicien des sols, mais d'un point de vue purement théorique, et dans le but très précis de construire des modèles mathématiques susceptibles de nous donner des solutions aux problèmes d'instabilité ou de cloquage que nous rencontrons dans le domaine des superstructures. Il nous suffira de nous assurer que les raisonnements que nous avons suivis, se recoupent de façon cohérente avec d'autres modes d'approche de ces problèmes, et se trouvent vérifiés par l'expérience.

FLAMBEMENT DES PIEUX DANS UN MILIEU ELASTIQUE HOMOGÈNE ET APPLICATIONS

L'étude des pièces comprimées et fléchies nous a conduit à la notion de "raideur" d'un milieu fictif équivalent à la raideur propre de la pièce. (fig 35)

Pour un pieu emprisonné dans un milieu élastique, nous devons simplement ajouter dans les calculs l'effet de la raideur réelle du terrain à cette raideur propre.

Dans ce problème, le pieu étant indéfini, la longueur de flambement libre ℓ est inconnue, mais nous allons montrer que l'on peut la calculer en fonction des caractéristiques mécaniques du pieu et du module de déformation du sol

Ecrivons en effet, comme ci-dessous

$$F_c = \frac{k\ell^2}{\pi^2} \quad (86)$$

avec

$$k = k_1 + k_2$$

k_1 = module de réaction fictif équivalent à la raideur du pieu $= \pi^4 EI / \ell^4$

k_2 = module de déformation réel du sol

$$\text{d'où} \quad F_c = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} + k_2 \cdot \frac{\ell^2}{\pi^2} \quad (87)$$

F_c est minimale, pour un pieu et un terrain donné pour une certaine valeur de ℓ annulant la dérivée ($dF_c/d\ell$) que nous avons nommée "longueur de flambement libre la plus dangereuse" *

$$\ell_0 = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\lambda}$$

en posant

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}}$$

En portant cette longueur dans (87) on obtient

$$F_c = 4EI\lambda^2 = 2\sqrt[4]{EI k} \quad (88)$$

La charge critique du pieu est donc le double de celle du poteau ayant la même longueur de flambement libre ℓ_0 .

Avec les valeurs numériques courantes du module de déformation des sols, on trouve en général qu'un pieu ne risque pas de "flamber" dans le sol. Il y a toutefois lieu de remarquer que les calculs ci-dessus ont été effectués en faisant abstraction du fluage du sol, et l'on conçoit que si ce phénomène était à craindre, on ne pourrait escompter aucun effet stabilisant du milieu extérieur, et il faudrait calculer le pieu comme si ce milieu était un liquide.

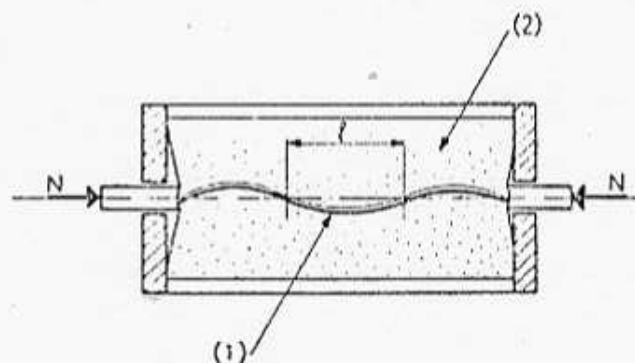


Fig. 35 Modèle pour l'étude du flambement d'une tige dans un milieu élastique. (C. BOURDON).

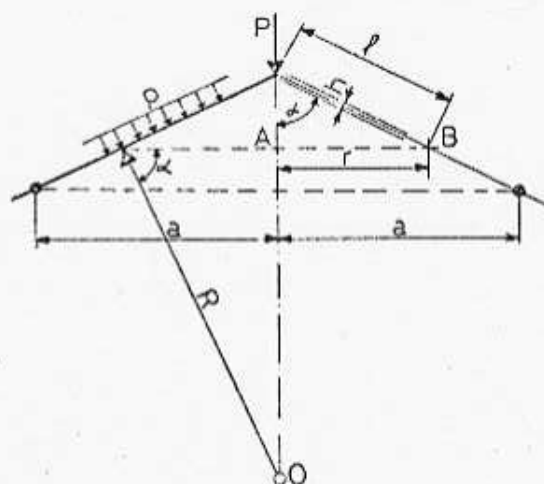


Fig. 36 Etude de la stabilité élastique d'une coque conique de révolution par l'analogie avec celle des pieux dans un milieu élastique — par M. C. BOURDON

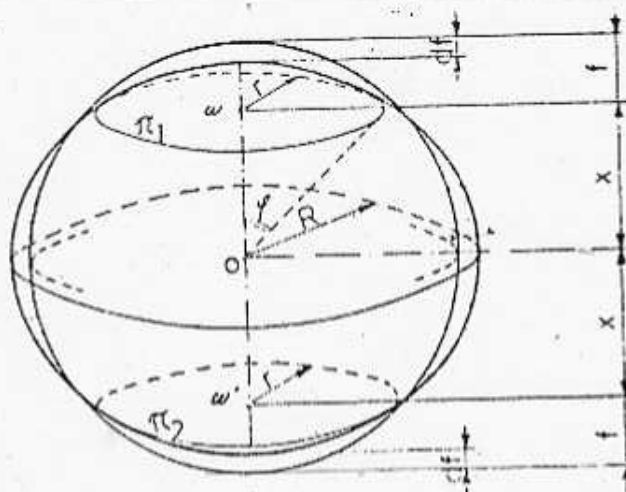


Fig. 37 Déformation libre d'une coque mince sphérique dans le phénomène du cloquage. (C. BOURDON).

Mais l'intérêt essentiel de ces résultats est leur adaptation remarquable aux théories du flambement des plaques et des coques comprimées.

Pour pouvoir passer du modèle élastique idéal ci-dessus au modèle fissuré, comme nous l'avons fait pour les poteaux en béton armé, nous pouvons recourir à la théorie des empilages élastiques, mais nous aboutissons cette fois, pour des éléments rectangulaires élastiques, à une équation différentielle d'ordre 4

$$y^4 \cdot y^{IV} = \frac{36 N}{E b} + \frac{6 K}{E b} y^2 \quad (89)$$

avec $y^{IV} = \frac{d^4 y}{dz^4}$

(K = "coefficient de ballast" du milieu élastique environnant)

On peut montrer qu'en première approximation l'effet du milieu extérieur est équivalent, du point de vue de la stabilité de l'empilage, à une réduction de la charge dans le rapport

$$1 - \frac{K \cdot E y^2 \left(\frac{l}{2} - \frac{y}{3} \right)}{3 N y_0 \sigma_E''} \quad (90)$$

y étant la largeur d'appui des éléments, variable le long de la colonne.

On en déduit que si le coefficient de ballast du milieu élastique environnant est supérieur à $3 \frac{\sigma_E'^2}{E} \cdot \frac{b}{h}$ (91) l'instabilité ne sera pas à craindre.

Il revient au même d'énoncer que la contrainte maximale au bord de la section de la colonne doit être inférieure à

$$\sqrt{\frac{K h E}{3 b}} \quad \text{ou} \quad \sqrt{\frac{K h E}{3}} \quad (92)$$

si $k = K/b$ est le "module de déformation" du milieu élastique environnant.

Ces résultats s'appliqueront en particulier à l'étude de la stabilité élastique des murs en maçonnerie, des plaques, des coupes et des coques.

a) APPLICATION ANALOGIQUE DE LA THEORIE DES PIEUX AUX PLAQUES CHARGÉES DANS LEUR PLAN

Ce problème revient à déterminer dans le plan de la plaque des "colonnes fictives" délimitées par les lignes isostatiques, et le coefficient de raideur transversal qui correspond à l'appui latéral que les éléments chargés peuvent trouver sur des éléments linéaires ou des bandes découpées dans la direction conjuguée (comme dans le cas d'un grillage de poutres).

Le premier de ces deux problèmes peut actuellement être traité complètement par la méthode des éléments finis développée par le Professeur ZIENKIEWICZ.

Nous avons nous-même proposé pour la résolution de ce problème une méthode approximative appliquée au calcul des contreforts des grands barrages et basée sur l'interprétation mécanique rigoureuse que nous avons donnée dans cette étude de la fonction d'AIRY, comme la résultante des moments en chaque point du plan des contraintes normales appliquées entre ce point et le bord libre du contrefort (1)

Le second problème se ramène à celui de la déformation transversale des plaques avec des conditions d'appui diverses au pourtour et a fait l'objet de très nombreuses études et publications auxquelles nous renvoyons le lecteur.

8) APPLICATION ANALOGIQUE DE LA THEORIE DES PIEUX AUX COQUES MINCES HOMOGENES.

En effet, comme nous l'avons mentionné dans un article paru dans la revue "Le Génie Civil" en Mars 1969, on peut décomposer une coque (membrane mince) en deux systèmes d'éléments porteurs principaux croisés, chacun d'eux constituant le "funiculaire" d'une fraction de la charge totale appliquée à la coque.

La répartition de cette charge entre ces 2 systèmes met en jeu des efforts agissant suivant la surface de la membrane.

Chaque système déformable constitue pour l'autre un "milieu élastique" à coefficient de ballast variable d'un point à l'autre.

On peut donc utiliser cette décomposition pour la recherche de solutions approchées au problème du flambement des coques minces.

C'est ce que nous avons fait tout d'abord pour le cône (avec comme cas particulier le cylindre) puis pour la sphère. (fig 36 et 37)

Par exemple, pour un cône de révolution, de grandes dimensions, chargé au sommet par une charge ponctuelle P nous pouvons prendre, pour les déformations symétriques le "module de réaction" équivalent :

$$k_0 = \frac{E h \cos^2 \alpha}{r^2 (1 - \nu^2)} \quad (93)$$

d'où la charge critique de flambement relative aux génératrices rectilignes :

$$P_{cr} = \frac{2\pi E h^2 \cos^2 \alpha}{\sqrt{3(1 - \nu^2)}} \quad (94)$$

$$\text{et } \sigma_n = \frac{E h \cos \alpha}{r \sqrt{3(1 - \nu^2)}} \quad (95)$$

et pour le cylindre ($\alpha = 0$)

$$\sigma_n = \frac{E h}{r \sqrt{3(1 - \nu^2)}} \quad (96)$$

Nous retrouvons très simplement la formule de TIMOSHENKO (théorie de la stabilité élastique § 87) pour le flambement symétrique.

Pour le cloquage avec ondes "anti-symétriques",

TIMOSHENKO a indiqué que la formule (96) doit être affectée d'un coefficient correctif égal à $3/5$, ce qui donne

$$\sigma'_a = \frac{3}{5} \frac{E h}{r \sqrt{3(1-\nu^2)}} \quad (97)$$

Dans le cas d'une coque conique soumise à une pression uniforme extérieure (fond de réservoir, coupole conique), on a :

$$p_a = \frac{6}{5} \frac{E h^2 \cos^2 \alpha}{a^2 \sqrt{3(1-\nu^2)}} \quad (98)$$

en admettant que la coque ne risque pas de flamber suivant les anneaux.

La pression critique relative à ce mode de flambement serait beaucoup plus faible :

$$p'_a = \frac{E h^3}{4 R^3 \sqrt{1-\nu^2}} \quad \text{avec } R = \frac{a}{\cos \alpha} \quad (99)$$

Mais si l'on tient compte de l'existence d'un anneau raidisseur disposé en bordure de la coque la pression critique de flambement de la coque est de la forme :

$$p''_a = \beta \cdot p_a \quad (100)$$

$$\beta = m \frac{h}{a} \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{avec } m \neq 2$$

Dans le cas d'une coque sphérique de rayon moyen r et d'épaisseur h , soumise à une pression uniforme p la résultante des contraintes internes régnant sur une longueur unité est

$$\sigma = \frac{p r}{2} \quad (101)$$

Si l'on prend pour module de déformation transversal celui qui correspond à une contraction uniforme de la coque (celle-ci restant sphérique)

$$k = \frac{p}{\eta} = \frac{2 E h}{r^2 (1-\nu^2)} \quad (102)$$

à chacun des deux cours d'anneaux orthogonaux que l'on peut découper dans la coque correspond un module

$$k' = \frac{k}{2} = \frac{E h}{r^2 (1-\nu^2)} \quad (103)$$

et d'après ce que nous avons vu pour les pieux on a, pour une bande de largeur unité :

$$m_a = 2 \sqrt{E I k'} = \frac{E h^2}{r \sqrt{3(1-\nu^2)}} \quad (104)$$

d'où la contrainte critique

$$\sigma_u = \frac{n_u}{h} = \frac{E h}{r \sqrt{3(1-\nu^2)}} = h \sqrt{\frac{1-\nu^2}{3}} \quad (105)$$

[C'est la même formule que pour le cylindre, (]

ou

$$\sigma_u = C \frac{E h}{r}$$

avec $\nu = 0,3$ (acier) : $C = 0,6$

d'où

$$p_u = \frac{2 n_u}{r} = \frac{2 E h^2}{r^2 \sqrt{3(1-\nu^2)}} \quad (106)$$

Les formules (104), (105) et (106) sont les mêmes que celles auxquelles conduit la théorie classique, au prix de calculs laborieux.

Or, tous les expérimentateurs ont trouvé de larges divergences entre les résultats d'essais et les formules théoriques ci-dessus et KARMAN-TSIEN ont proposé la formule empirique :

$$\sigma_u = 0,18 \frac{E h}{r} \quad (107)$$

soit, en moyenne pour le coefficient C , $\frac{3}{10}$ seulement de la valeur théorique.

L'analogie physique que nous avons faite va nous fournir le moyen d'expliquer cette divergence.

En effet, nous avons calculé un "module de réaction" d'un milieu fictif correspondant à la raideur propre de la sphère dans une déformation transversale uniforme (centripète ou centrifuge).

Cette hypothèse est trop restrictive.

La déformation qui correspond au mode de flambement réel est celle qui met en jeu l'énergie élastique minimale, c'est à dire, comme on peut le montrer aisément, dans une déformation avec aplatissement (ou bombement) des calottes polaires et dilatation (ou contraction) de la sphère dans le plan équatorial correspondant.

Si l'on considère une déformation "antisymétrique" autour de deux "cercles nodaux", comme indiqué sur la figure ci-jointe, un calcul simple conduit à considérer les deux calottes de hauteur

$$f = 0,28 r \quad (108)$$

dont la variation relative de courbure est

$$\frac{dr}{r} = \frac{2r-f}{f} \cdot \sigma \cdot \frac{(1-\nu^2)}{E} = \frac{2-0,28}{0,28} \sigma \cdot \frac{1-\nu^2}{E} = 6,15 \cdot \sigma \cdot \frac{1-\nu^2}{E} \quad (109)$$

d'où un coefficient de raideur transversal réduit :

$$k'' = \frac{k'}{6,15} \quad (110)$$

et la charge critique :

$$n'_{cr} = 2 \sqrt{E I k''} = \frac{E k^2}{\lambda \sqrt{18,45(1-\nu^2)}} \quad (111)$$

et la contrainte critique

$$\sigma'_{cr} = \frac{E k}{\lambda \sqrt{18,45(1-\nu^2)}} \quad (112)$$

soit pour l'acier

$(\nu = 0,3)$

et pour le béton

$(\nu = 0,15)$

$$\sigma'_{cr} = 0,244 \frac{E k}{\lambda}$$

(113bis)

$$\sigma'_{cr} = 0,235 \frac{E k}{\lambda}$$

La longueur théorique de flambement est alors :

$$l_0 = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{E_c}{k''}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\sigma'_{cr} h}{k''}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{2,06(1-\nu^2)} \sqrt[2]{h k} \quad (114)$$

soit pour l'acier $(\nu = 0,3)$ $l_0 \sim 2,6 \sqrt{h k}$ (115)

et pour le béton $(\nu = 0,25)$ $l_0 \sim 2,64 \sqrt{h k}$ (115bis)

Une correction supplémentaire aux formules (112) à (115bis) provient comme dans le cas du cylindre, de l'allure dissymétrique ("gaufrage" en losanges) du cloquage local et nous appliquerons, comme nous l'avons fait pour le cylindre, un coefficient minorateur de 0,6, ce qui conduit finalement aux valeurs suivantes des contraintes critiques théoriques :

pour l'acier $(\nu = 0,3)$ $\sigma''_{cr} = 0,146 \frac{E k}{\lambda}$ (116)

pour le béton $(\nu = 0,15)$ $\sigma''_{cr} = 0,141 \frac{E k}{\lambda}$ (116 bis)

L'effet de plaque, résistance de la coque à la flexion, relève un peu les valeurs obtenues, de sorte que l'on peut considérer que notre raisonnement conduit bien aux mêmes valeurs que les expériences de KARMAN-TSIEN.

Quant à la longueur de flambement correspondante, on trouve aisément que pour la sphère elle est voisine de $3 \sqrt{h k}$

C) COQUES EN BETON ARMÉ

Le modèle analogique que nous avons proposé pour l'étude de la stabilité élastique des coques homogènes, (dont les résultats sont, comme on l'a vu sur quelques cas particuliers parfaitement recoupés par les théories classiques) va maintenant permettre d'introduire, dans les formules relatives aux coques en béton armé, "l'anisotropie de la matière".

De même que dans la pièces rectiligne, dont la souplesse est accrue et la capacité de charge axiale est réduite à cause de la fissuration accompagnant les déformations, de même, dans une coque mince, la fissuration dans une direction quelconque (méridiens ou parallèles) affaiblit considérablement la raideur transversale (effet de ballast) qui assurait normalement la stabilité des éléments comprimés, et peut entraîner leur flambement (c'est à dire le cloquage).

Si les fissures sont traversées par des armatures, c'est alors l'élasticité de ces armatures qui se substitue à celle du béton pour jouer le rôle de ressort et l'on conçoit que la formule de cloquage doive comporter d'une par l'expression de l'épaisseur (ou l'inertie) de la coque dans la direction des efforts de compression, et la section des armatures assurant la continuité de la structure à travers les fissures.

Une bonne image de ce qui se passe est donnée par l'équilibre des douves d'un tonneau chargées suivant la direction du grand axe et maintenues par les cercles.

Dans les cas particuliers envisagés plus haut, les calculs conduisent aux résultats suivants :

Cas du cylindre en béton armé, axialement chargé.

(fig 38)

D'après (88), la charge critique est de la forme

$$N'_{cr} = 2 \sqrt{E I k'} \quad (117)$$

avec, pour le cylindre homogène d'épaisseur fictive $k' \neq h$

$$k' = \frac{h' E}{r^2 (1 - \nu^2)} = \frac{h'}{h} \cdot \frac{h E}{r^2 (1 - \nu^2)} \quad (118)$$

d'où, compte tenu du terme correctif $3/5$ de TIMOSHENKO

$$\sigma'_{cr} = \frac{3 N'_{cr}}{5 h} = \frac{3}{5} \cdot \frac{E h}{r \sqrt{3(1 - \nu^2)}} \cdot \left(\frac{h'}{h} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (119)$$

h' est ici l'épaisseur de béton équivalente aux armatures (cercles), soit en appelant :

.../...

ω : la section des cercles par mètre de génératrice
et m : le coefficient d'équivalence $\frac{E_a}{E_b}$

$$\frac{h'}{h} = \frac{m \omega}{h \cdot 1} \quad (120)$$

ou, en posant $\frac{\omega}{h} = \frac{A}{100}$ (121)

(A = pourcentage d'armatures horizontales)

$$\sigma'_a = \frac{3}{5} \frac{E h}{h \sqrt{3(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{m A}{100}}$$

d'où $\sigma'_a = 0,21 \frac{E h}{h} \sqrt{\frac{m A}{100}}$ (122)

Théoriquement, selon ce modèle, la paroi pourrait être considérée comme "homogène" si $\frac{m A}{100} = 1$, soit $A \sim 6,2\%$

La formule (122) rejoint la formule de KARMAN-TSIEN pour les cylindres homogènes

$$\sigma = 0,18 \frac{E h}{h} \quad (123)$$

lorsque $0,21 \sqrt{\frac{m A}{100}} \sim 0,18$ soit $\frac{m A}{100} = 0,73$

De tels pourcentages ne sont jamais réalisés en pratique, et il faut bien en conclure que la formule de KARMAN TSIEN surestime exagérément la contrainte critique dans le cas des coques en béton armé, lorsque la fissuration est possible, et qu'elle conduit à des coefficients de sécurité inexacts et illusoire.

Appelons $\bar{\sigma}'_b$ la contrainte maximale admissible dans la coque

$$\sigma'_a = \xi \bar{\sigma}'_b$$

ξ = coefficient de sécurité

On a :

d'où $\bar{\sigma}'_b = \frac{0,21}{\xi} \cdot \frac{E h}{h} \cdot \sqrt{\frac{m A}{100}}$ (124)

Exemple : $A\% = \frac{100}{m} \left(\frac{\xi}{0,21} \frac{\sigma'_b}{E_b} \frac{h}{h} \right)^2 = 100 m \left(\frac{\xi}{0,21} \frac{\bar{\sigma}'_b}{E_a} \frac{h}{h} \right)^2$

avec $\bar{\sigma}'_b = 80 \text{ Kg/cm}^2$, $m = 15$, et $E_a = 21000 \text{ Kg/mm}^2$

$$A\% = 5 \cdot 10^{-5} \xi^2 \frac{h^2}{h^2} \quad \text{d'où} \quad \xi = 142 \frac{h}{h} \sqrt{A}$$

et pour une valeur quelconque de σ'_b (en Kg/cm^2)

$$\xi \# \frac{11400}{\sigma'_b} \frac{h}{h} \sqrt{A} \quad (125)$$

En particulier, avec un pourcentage d'acier minimal de 0,26%

$$\frac{h}{r} > \xi \frac{\sigma_b}{5800}$$

et

$$\boxed{\sigma_b' < 5800 \frac{h}{\xi r}} \quad (126)$$

Dans le cas du cône, on appliquerait les formules du cylindre tangent de rayon $R = \frac{r}{\cos \alpha}$

Dans le cas des coques à double courbure, dans toute zone où la fissuration peut se produire (au droit des appuis par exemple), on est encore ramené à une formule telle que :

$$\boxed{\sigma_b' = \frac{C'}{\xi} \frac{E h}{r}} \quad (127)$$

où

$$C' = C \sqrt{\frac{m A}{100}} \quad (128)$$

Pour une coque homogène, on prendra $\sqrt{\frac{m A}{100}} = 1$

Les coefficients C et C' dépendant de la forme de la coque et de ses conditions d'appui.

Etant donné la grande dispersion des résultats des essais effectués sur les coques homogènes, il faut s'attendre à des variations également importantes des coefficients C et C' aussi bien dans les essais qui tiendraient compte de la fissuration, que dans les applications relatives aux ouvrages à construire.

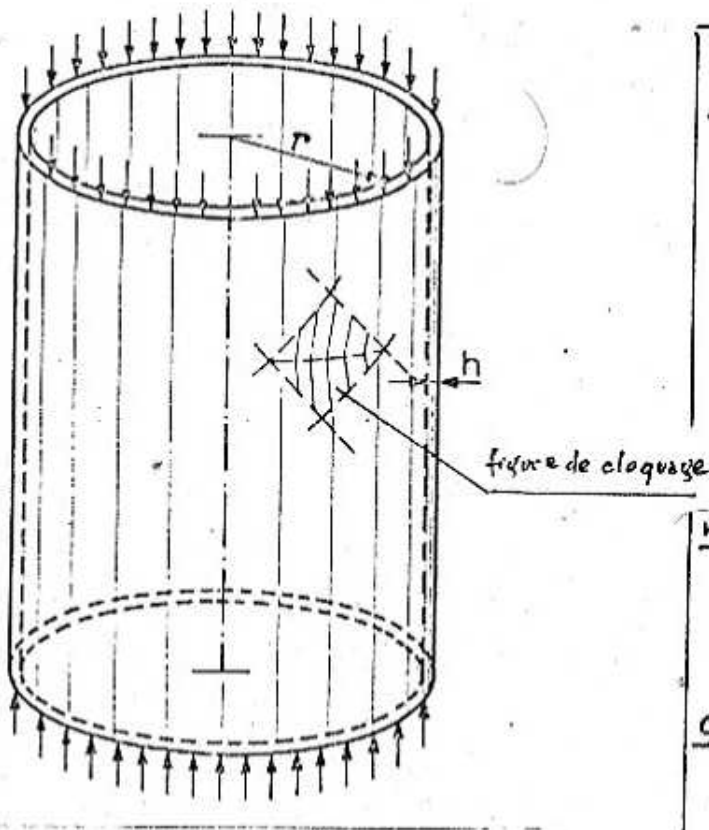
Les considérations ci-dessus guideront les expérimentateurs dans la conception des modèles et l'interprétation des résultats.

D'une façon générale, elles inciteront les projeteurs à être prudents dans l'application des formules toutes faites au cas du béton armé.

En conclusion nous leur suggérons d'éviter les ouvrages trop souples qui sont bien entendu les plus dangereusement sujets au phénomène de l'instabilité, qu'il s'agisse de simple flambement, de déversement ou de cloquage.

Brundage

Voir Cahier des Charges des réservoirs et cuves en béton armé Annales I T B T P - Juillet-Août 1966



Valeurs de la contrainte critique de cloquage

Timoshenko (théorie élastique)

$$\sigma_a = \frac{Eh}{r\sqrt{3(1-\nu^2)}}$$

valeur corrigée :

$$\sigma_a = \frac{3}{5} \cdot \frac{Eh}{r\sqrt{3(1-\nu^2)}}$$

Karman-Tsien : (matériaux homogènes)

$$\sigma_a = C \cdot \frac{E \cdot h}{r}$$

avec $C = 0,183$

C. Bourdon : (béton armé)

$$\sigma_a = C' \cdot \frac{E \cdot h}{r}$$

avec $C' = C \cdot \sqrt{\frac{mA'}{100}}$

où $A = \frac{100 \omega}{h}$ (% d'acier)

ω = section des cerces p.m.l

$m = E_s / E_b$

Fig 38 : Phénomène du cloquage d'une paroi cylindrique mince axialement chargée. Expressions de la contrainte critique selon divers auteurs.

4ème PARTIE

STABILITÉ AU DEVERSEMENT DES POUTRES

A) EQUATIONS CLASSIQUES, GENERALISATION, APPLICATION

Le problème du déversement des poutres minces à section constante a été étudié dès la fin du siècle dernier par FRANDTL qui a établi l'équation différentielle à laquelle doit satisfaire l'angle φ de déviation d'une section verticale :

$$\varphi'' + \frac{M^2}{B.C} \cdot \varphi = 0 \quad (129)$$

M = moment de flexion dû aux charges verticales

où $B = E.I$ = raideur de flexion transversale

$C = G.K$ = raideur de torsion de la section

Cette relation a été complétée par la suite par TIMOSHENKO, qui y a introduit un terme supplémentaire traduisant, pour les pièces en double T symétrique, l'effet de la rigidité de flexion latérale des ailes

$$\varphi'' + \frac{M^2}{B.C} \varphi - \frac{D.z^2}{C.2} \varphi^{IV} = 0 \quad (130)$$

$$\text{où } \varphi'' = \frac{d^2\varphi}{dx^2}, \quad \varphi^{IV} = \frac{d^4\varphi}{dx^4}$$

avec $D = E.J$ = raideur de flexion latérale d'une aile

z = distance entre les centres de gravité des ailes et l'axe neutre.

Pour les poutres minces on a simplement $D = \frac{B}{2}$

et $z = \frac{h}{2}$, (h étant la hauteur du profil)

Les relations (129) et (130) supposent la charge appliquée au niveau de la ligne moyenne.

Si elle est appliquée à une distance d à la verticale de celle-ci, on en tiendra compte en ajoutant un terme supplémentaire, et l'équation devient :

$$\varphi'' + \frac{M^2}{B.C} \varphi - \frac{D.z^2}{C.2} \varphi^{IV} + \frac{p.d}{C} \cdot \varphi = 0 \quad (131)$$

où p est la charge unitaire, supposée constante.

Sous cette forme, on voit immédiatement que la correction à apporter au "moment de flexion critique M_c " est telle que

$$\frac{M_c'^2}{B.C} + \frac{p.d}{C} = \frac{M_c^2}{B.C}$$

ou

$$\frac{M_c'}{M_c} = \sqrt{1 - \frac{B.p.d}{M_c^2}} \quad (132)$$

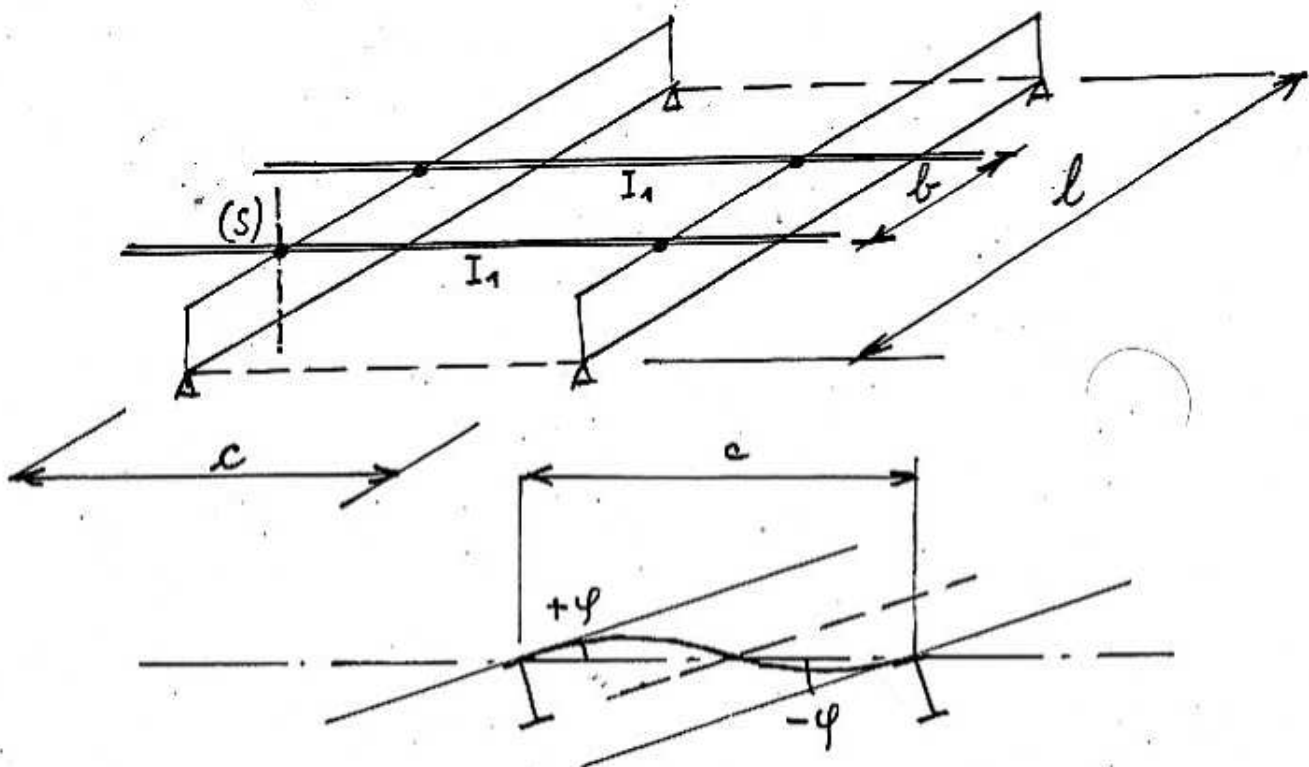
(1) Voir Frandtl : thèse Nuremberg 1899

A.G. Mitchell Phil. Mag. Vol 42 1899

Timoshenko : annales des Ponts et Chaussées 1913 fasc III IV, V

Il est logique de considérer que p est proportionnel à M_c et à M'_c . On devra donc calculer M'_c par approximations successives.

D'une façon analogue nous pouvons tenir compte de l'action stabilisatrice de pannes, encastrées sur la poutre à intervalles réguliers, en ajoutant à (I31) un terme supplémentaire évalué comme indiqué ci-après.



Soit, φ l'inclinaison d'une section (S) de la poutre

c l'entr'axe des poutres de portée l

b l'entr'axe des pannes de portée c

M_0 le moment d'encaastrement d'une panne sur la poutre

I_1 l'inertie d'une panne

On a la relation classique $\varphi = \frac{1}{2} \frac{M_0 \cdot c}{EI_1 \cdot 2}$

d'où en appelant $m = \frac{2 M_0}{b}$, le moment réparti unitaire :

$$m = \frac{8 EI_1 \varphi}{b \cdot c} \quad (I33)$$

Remarque : pour une poutre de rive, on aurait seulement

$$m' = \frac{m}{2} = \frac{4 EI_1 \varphi}{bc}$$

.../...

Ce couple stabilisateur m est, au signe près, de même nature que le couple $p d y$ de l'équation (131), qui devient en conséquence :

$$y'' + \frac{M^2}{BC} y - \frac{D}{C} \frac{z^2}{2} y^{IV} + \frac{p.d}{C} y - \frac{8EI_1}{bcC} y = 0 \quad (134)$$

En regroupant les termes en y , et en appelant, comme plus haut, M_c le moment critique correspondant à (129), ou (130) si on tient compte de la raideur de flexion des ailes et M_c'' le moment critique de la même poutre, soumise aux mêmes charges réparties, mais liée rigidement aux poutres voisines par les pannes, nous aurons :

$$\frac{M_c''^2}{BC} + \frac{p.d}{C} - \frac{8EI_1}{bcC} = \frac{M_c^2}{BC}$$

d'où
$$\frac{M_c''}{M_c} = \sqrt{1 - \frac{B p d}{M_c^2} + \frac{8EI_1 B}{bc M_c^2}} \quad (135)$$

La solution-type, pour une poutre soumise à la flexion circulaire est

$$M_c = \frac{\pi \sqrt{BC}}{l} \quad (136)$$

d'où
$$\frac{M_c''}{M_c} = \sqrt{1 - \frac{p d l^2}{\pi^2 C} + \frac{8EI_1 l^2}{\pi^2 bc C}} \quad (137)$$

(en négligeant la flexion des ailes)

Pour un autre type de chargement on aurait $M_c = \frac{n \sqrt{BC}}{l}$ où n est un facteur numérique

Pour une charge répartie : $n = 3,54$

En pratique p étant proportionnel à M_c'' on devra procéder, en général, par approximations successives.

Remarque : La prise en compte de la flexibilité des ailes n'est pas aussi immédiate que celle des autres effets, puisqu'elle fait apparaître, dans l'équation (130) une dérivée d'ordre 4.

Mais on peut aisément résoudre cette difficulté dans le cas des poutres sur appuis simples d'extrémités, bloquées en torsion aux extrémités, sur appuis : il suffit de remplacer pour cela les deux équations fondamentales (1)

$$B.y'' = M.y \quad (138)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{D}{C} \frac{z^2}{2} \frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{M^2}{BC} y = 0 \quad (139)$$

(1) Voir article de Mr. LEBELLE dans les Annales de l'I.T.B.T.P. de Septembre 1959.

par le système

$$B \cdot y'' = M \cdot y \quad (I40)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{\pi^4}{l^4} \cdot \frac{D}{C} \cdot \frac{z^2}{2} \cdot y + \frac{M^2}{BC} y = 0 \quad (I41)$$

Le passage de (I39) à (I41) suppose simplement que la loi de variation de y le long de la poutre est sinusoidale :

$$y = y_{\max} \cdot \sin \frac{\pi x}{l} \quad (I42)$$

en prenant l'origine à une extrémité de la poutre.

Ce qui donne $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\pi^2}{l^2} y$; $\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{\pi^4}{l^4} y$

L'équation (I31) peut donc dans ce cas particulier être remplacée par :

$$-\frac{\pi^2}{l^2} + \frac{M^2}{BC} - \frac{\pi^4}{l^4} \cdot \frac{D}{C} \cdot \frac{z^2}{2} + \frac{p \cdot d}{C} = 0 \quad (I43)$$

d'où :

$$M_{1c} = \frac{\pi \sqrt{BC}}{l} \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{2} \frac{D}{C} \cdot \frac{z^2}{l^2} - \frac{p \cdot d \cdot l^2}{\pi^2 C}} \quad (I44)$$

soit, pour la flexion circulaire, avec $D \sim \frac{B}{2}$, et en supposant $d=0$

$$M_{1c} = \frac{\pi \sqrt{BC}}{l} \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4} \frac{B}{C} \frac{z^2}{l^2}} \quad (I45)$$

ou en posant $\beta = \frac{B z^2}{C l^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{D}{C} \cdot \frac{z^2}{a^2}$, avec $a = \frac{l}{2}$ (I46)

$$M_{1c} = M_c \cdot \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4} \beta} \quad (I47)$$

expression identique à celle indiquée par Mr. F. LEBELLE.

Donc pour une poutre douée de résistance à la torsion, sur appuis simples aux extrémités, en flexion, mais encastree aux appuis à la torsion, et simplement appuyée au égard aux efforts latéraux, nous pouvons écrire, dans le cas de la flexion circulaire :

$$\frac{M''_c}{M_c} = \sqrt{1 + \frac{\pi^2 B z^2}{4 C l^2} + \frac{8 E I_1 l^2}{\pi^2 C b_c} - \frac{p d l^2}{\pi^2 C}} \quad (I48)$$

avec $M_c = \frac{\pi \sqrt{BC}}{l}$, ou encore

$$M''_c = \sqrt{M_c^2 + \frac{\pi^4}{l^4} \frac{B^2 z^2}{4} + \frac{8 E I_1}{b \cdot c} - p \cdot d \cdot B} \quad (I49)$$

.../...

En particulier pour une poutre n'ayant pas de résistance à la torsion ($M_c = 0$)

$$M''_{c_0} = \sqrt{\frac{\pi^4 \frac{B^2 z^2}{4}}{l^4} + \frac{8 EI_1}{b_c} - p d B} \quad (150)$$

et si $d = 0$ et $I_1 = 0$ cette relation se réduit à :

$$M''_{c_0} = \frac{\pi^2 \cdot B \cdot z}{l^2 \cdot 2} \sim \frac{\pi^2 D \cdot z}{l^2} = \frac{N_c \cdot z}{2} \quad (151)$$

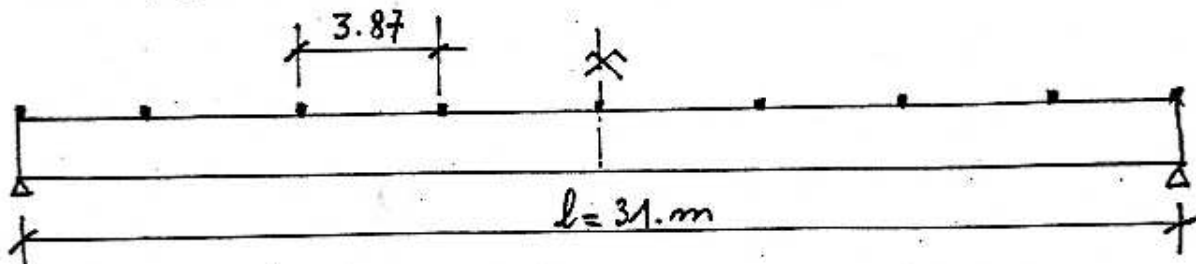
en appelant N_c la charge critique d'EULER de la poutre (ou de l'ensemble des 2 membrures).

Pour une charge répartie p , (au lieu d'un moment constant), nous aurions des expressions analogues aux formules indiquées ci-dessus, avec des coefficients numériques légèrement différents.

Ces coefficients n'intervenant dans les formules que par leur racine carrée, on pourra en pratique se contenter des formules écrites, qui donnent une bonne approximation, et montrent clairement le rôle des différents paramètres. On n'oubliera pas que dans le terme correctif $\left(\frac{p d l^2}{\pi^2 C}\right)$, p n'est pas une constante mais varie comme M''_c .

Exemple :

Soit la poutre de hauteur constante $h = 1,24$ m de 31 ml de portée, supportant une couverture légère, en bacs "acier", par l'intermédiaire de poutrelles de 12.00 mètres



soumise aux charges suivantes :

Pannes 15 x 35, tous les 3.87 m, poids 130 Kg/ml

Bacs + isolation + étanchéité : 25 Kg/12

Neige : 36 Kg/12

Poids propre : en moyenne $\frac{24000}{31} \sim 770$ Kg/ml

Surcharge permanente : $(130 + 25 \times 3.87) \frac{12}{3.87} = 700$

partiel $\frac{1.470 \text{ Kg/ml}}$

Surcharge de neige 36 x 12.

$\frac{430}{1.900 \text{ Kg/ml}}$

.../...

$$\text{Moment maximal en travée : } M = \frac{pl^2}{8} = \frac{1,9 \times 31^2}{8} = 230 \text{ T.m}$$

Caractéristiques géométriques de la poutre :

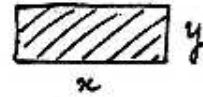
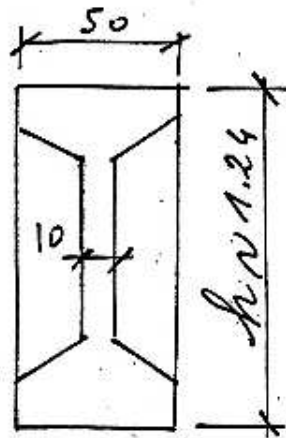


fig.

moment d'inertie transversal (moyen) $i = 0,003591 \text{ m}^4$
 moment d'inertie de torsion : $\int \rho xy^3 = K = 0,002265 \text{ m}^4$

moment d'inertie des ailes : $i_a = 0,000552$



$$B = E \cdot i = 1,75 \cdot 10^6 \cdot 0,003591 = 6300$$

$$C = \frac{E \cdot K}{2,3} = \frac{1,75 \cdot 10^6 \cdot 0,002265}{2,3} = 1720$$

$$E \cdot I_1 \sim 2 \cdot 10^6 \cdot 0,000552 = 1104$$

$$d \sim 0,37 \text{ m. ; } z \sim 1,04 \text{ m. (moyen)}$$

Calculons les termes situés sous le radical de (I48)

$$\frac{\pi^2 B z^2}{4 C l^2} = 2,5 \cdot \frac{6300}{1720} \cdot \frac{1,04^2}{(31)^2} = 0,0103$$

$$\frac{8 E I_1 l^2}{\pi^2 C b c} = 0,8 \cdot \frac{1104}{1720} \times \frac{31^2}{3,87 \times 12} = 10,6258$$

$$- \frac{p \cdot d \cdot l^2}{\pi^2 \cdot C} = -1,9 \times \frac{0,37 \times 31^2}{10 \times 1720} = -0,0393$$

On constate que l'effet de flexion des ailes est ici négligeable, ainsi que celui de la position de la charge, et en pratique nous avons :

$$\frac{M''_c}{M_c} = \sqrt{1 + 10,6} = \sqrt{11,6} = 3,4$$

$$\text{d'où } M''_c = 3,4 \frac{\pi \sqrt{BC}}{l} = \frac{3,4 \times 3,14 \times \sqrt{3300}}{31} = 1140 \text{ T.cm}$$

et un coefficient de sécurité de $\frac{1140}{230} = 4,95 \sim 5$

En fait, pour une poutre soumise à une charge uniforme la relation $M_c = \frac{\pi \sqrt{BC}}{l}$ est à remplacer par $M_c = \frac{3,54 \sqrt{BC}}{l}$ et le coefficient $\frac{8}{\pi^2}$ par $\frac{8}{(3,54)^2} = 0,635$

Le terme correspondant, sous le radical de (148) est donc : $\frac{0,635}{0,8} \times 10,62 = 8,45$

$$\text{d'où } \frac{M''_c}{M_c} = \sqrt{1 + 8,45} = \sqrt{9,45} = 3,1$$

au lieu de 3,4. D'où

$$M''_c = 3,1 \times \frac{3,54 \sqrt{BC}}{l} = \frac{3,1 \times 3,54 \times \sqrt{3300}}{31} = 1170 \text{ T.cm}$$

on arrive au même résultat qu'avec la flexion circulaire.

On voit que, du moins en théorie, le rôle des pannes est très efficace, puisqu'il relève le coefficient de sécurité au déversement de 1,46 \sim 1,5 à 5 environ.

Il y a lieu toutefois de remarquer que les calculs ci-dessus supposent que le comportement des matériaux est élastique, et conduisent en réalité à une évaluation par excès du moment critique.

La discussion précédente nous a permis de préciser pour les pièces en double T symétrique le rôle des principaux paramètres qui entrent en jeu dans le phénomène du déversement.

Il serait intéressant de pouvoir s'affranchir de la restriction que nous avons faite en ce qui concerne les propriétés élastiques des matériaux.

Une première méthode consisterait à substituer dans les formules des grandeurs physiques aux caractéristiques géométriques i , K et I_x .

Soit N_c la charge critique de flambement transversal de la membrure comprimée :

$$N_c = \frac{\pi^2 E i}{l^2} = \frac{\pi^2 B}{l^2} \quad (152)$$

Soit F_c la charge critique de flambement par torsion de poutre supposée chargée longitudinalement :

$$F_c = G K \frac{S}{I_0} = \frac{G K}{\rho^2} = \frac{C}{\rho^2} \quad (153)$$

.../...

où I_o = moment d'inertie polaire = $i + i$
(pour la poutre étudiée plus haut : $i_o \approx 0,06 \text{ m}^4$)

S = section (moyenne) de la poutre

$\rho = \sqrt{\frac{I_o}{S}}$ = rayon de giration de la section
(en général voisin de $\frac{z}{2}$).

Le moment critique de flambement de la poutre, soumise à la flexion circulaire est comme on l'a vu :

$$M_c = \frac{\pi \sqrt{BC}}{l} \quad (136)$$

d'où, en remplaçant B et C par leurs valeurs tirées de (152) et (153) :

$$M_c = \rho \cdot \sqrt{N_c \cdot F_c} \quad (154)$$

Le moment critique de déversement est donc le couple produit de l'effort de compression rectif, égal à la moyenne géométrique de la charge critique de flambement transversal de la poutre et de la charge critique de flambement par torsion de la poutre, par un bras de levier égal au rayon de giration de la section.

En général F_c est beaucoup plus grand que N_c et par conséquent

$$M_c \gg \rho N_c$$

Remarque : On a rigoureusement $M_c = \rho \cdot F_c$ lorsque la résistance à la torsion est nulle, et que la flexion transversale des ailes intervient seule, comme l'a montré la formule (151) en y faisant $\rho = \frac{z}{2}$.

Les deux membrures étant comprimées les grandeurs F_c et N_c sont à calculer comme pour des sections homogènes.

On peut généraliser la formule de PERRY donnant le coefficient d'amplification en écrivant :

$$\chi = \frac{1}{1 - \frac{N}{2\sqrt{N_c F_c}}} \quad (155)$$

où N est égal à : $\sigma \cdot S$

(σ = contrainte maximale dans la membrure supérieure à la distance ρ au-dessus de la ligne moyenne).

Soit dans l'exemple envisagé : (approximativement)

$$N = 1400 \times 0,2 = 280 \text{ tonnes}$$

$$N_c = 65,5 \text{ tonnes} \quad F_c = 575 \text{ tonnes}$$

$$2\sqrt{N_c F_c} = 388 \text{ tonnes}$$

d'où $\chi = 3,5$

On trouve ici une valeur de χ élevée.
En fait, en tenant compte des liaisons supplémentaires apportées par les pannes, ce coefficient se trouve réduit.

B) INTERPRETATION DU DÉVERSEMENT AU MOYEN DE L'ANALOGIE AVEC LE FLAMBEMENT EN MILIEU ELASTIQUE

Admettons comme ci-dessus que la déviation φ de l'axe des sections ait une répartition sinusoïdale le long de la poutre :

$$\varphi = \varphi_0 \cdot \cos \frac{\pi x}{l} \quad (I56)$$

(en prenant l'origine à mi-portée)

La rotation unitaire de torsion est :

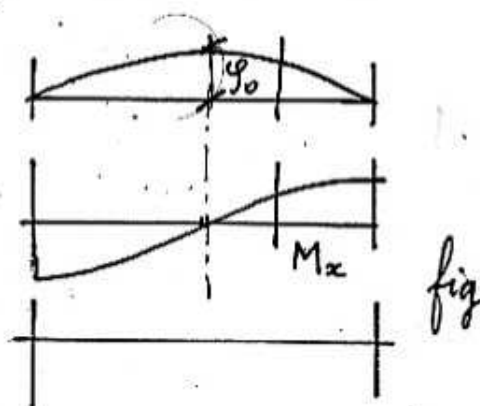
$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{\pi}{l} \varphi_0 \sin \frac{\pi x}{l} \quad (I57)$$

et le couple de torsion dans la section d'abscisse x :

$$M_x = -GK \frac{\pi}{l} \varphi_0 \sin \frac{\pi x}{l} \quad (I58)$$

Soit le couple élémentaire (par unité de longueur de poutre) correspondant à M_x :

$$m_x = -\frac{dM_x}{dx}$$



$$\text{d'où } m_x = GK \frac{\pi^2}{l^2} \varphi_0 \cos \frac{\pi x}{l} \quad (I59)$$

A ce couple correspond, au niveau des membrures une réaction transversale fictive :

$$q_x = \frac{m_x}{z} = GK \frac{\pi^2 \varphi_0}{l^2 z} \cos \frac{\pi x}{l} = \frac{G \cdot K \cdot \pi \cdot \varphi}{l^2 \cdot z} \quad (I60)$$

Soit k le "coefficient de ballast", fictif correspondant :

$$k = \frac{q_x}{y} = \frac{2 q_x}{\varphi \cdot z} \quad (I61)$$

$$\text{d'où } k = 2GK \frac{\pi^2}{l^2 z^2} = \frac{2 C \pi^2}{l^2 z^2} \quad (I62)$$

Or, il résulte de la théorie du flambement des pièces prismatiques dans un milieu élastique que la charge critique de flambement peut-être considérée comme la somme de deux termes correspondant l'un à la raideur de la pièce, et donné par la formule habituelle d'EULER :

$$N_{1c} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{\pi^2 D}{l^2} \quad (I63)$$

et l'autre, correspondant à la raideur du milieu élastique extérieur :

$$N_{2c} = \sqrt{EI k} = \sqrt{D k} \quad (I64)$$

(D étant la raideur de la poutre)

Remarque : pour un poutre de longueur infinie il est bien connu que $N_{1c} = N_{2c}$, ce qui fixe la longueur de flambement, que nous avons appelée "la plus dangereuse", et entraîne

$$N_c = 2\sqrt{EI k}.$$

En appliquant ces résultats à la membrure de la poutre, de raideur D, nous obtenons immédiatement la charge critique de la membrure :

$$\begin{aligned} P_c &= \sqrt{D k} + \frac{\pi^2 D}{l^2} = \\ &= \frac{\pi}{l z} \sqrt{2 D C} + \frac{\pi^2 D}{l^2} \sim \frac{\pi}{l z} \sqrt{B C} + \frac{\pi^2 B}{2 l^2} \quad (I65) \end{aligned}$$

d'où l'on tire, pour le moment de déversement critique :

$$M_c = P_c \cdot z \quad (I66)$$

$$\begin{aligned} \text{soit } M_c &= \frac{\pi \sqrt{B C}}{l} + \frac{\pi^2 B z}{2 l^2} = \\ &= \frac{\pi \sqrt{B C}}{l} \left(1 + \frac{\pi z}{2 l} \sqrt{\frac{B}{C}} \right) = \frac{\pi \sqrt{B C}}{l} (1 + \sqrt{\beta}) \quad (I67) \end{aligned}$$

Le terme β étant en général très inférieur à 1, on retrouve donc directement la solution obtenue par FRANDEL en résolvant l'équation différentielle d'équilibre d'un tronçon de poutre.

Il est donc légitime de considérer, comme nous l'avons supposé, que le problème du déversement des poutres se ramène à celui d'un flambement de membrure dans un milieu élastique dont la raideur est proportionnelle à la raideur de torsion de la poutre.

Le couple de torsion est, comme on l'a vu :

$$M_x = C \cdot \theta = C \cdot \frac{d\varphi}{dx} \quad \text{avec } C = G K$$

Au "coefficient de ballast" k défini par la relation (I62), on peut faire correspondre un coefficient de raideur

de torsion, (comme nous l'avons fait pour les sections d'encastrement des poteaux).

$$m_x = k^* \cdot \theta = q_x \cdot z = k \cdot y^* \cdot z = k \cdot \theta \cdot \frac{z^2}{2} \quad (I68)$$

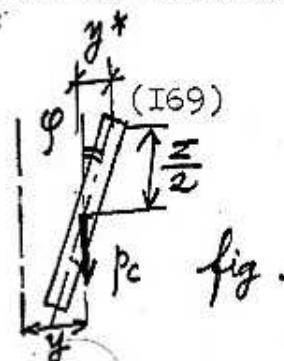
d'où

$$k^* = \frac{k z^2}{2} = \frac{C x^2}{l^2}$$

D'autre part, la flexion transversale de la poutre produit un déplacement y latéral, au niveau du centre de torsion, auquel correspond un "coefficient de ballast" :

$$k' = \frac{\pi^4 \cdot E \cdot i}{l^4} = \frac{\pi^4 B}{l^4} \quad (I69)$$

Ecrivons l'équilibre d'un tronçon de poutre de longueur dx , soumis à la charge verticale $p_c dx$.



L'équation d'équilibre, dans le plan de figure s'écrit :

$$p_c \cdot y = \frac{C \pi^2}{l^2} \cdot y \quad (I70) \quad \text{avec} \quad \varphi = \frac{2 y^*}{z}$$

(où C est la raideur unitaire de torsion) et, dans le plan perpendiculaire, l'équilibre de flexion plane autour d'un axe vertical donne

$$p_c \cdot y = \frac{B \pi^4}{l^4} \cdot y \quad (I71)$$

(où B est la raideur de flexion unitaire)
d'où, en faisant le produit de ces 2 relations

$$p_c^2 = \frac{\pi^6 B C}{l^6} \quad \text{et} \quad p_c = \frac{\pi^3}{l^3} \sqrt{B C} \quad (I72)$$

Nous retrouvons ainsi, de façon directe, le résultat classique.

En appelant B_1 la raideur de flexion locale et C_1 la raideur de torsion locale les formules ci-dessus deviennent :

$$p_c \cdot y = C_1 \cdot y \quad (I73)$$

$$p_c \cdot y = B_1 \cdot y$$

d'où

$$p_c = \sqrt{B_1 C_1} \quad (I74)$$

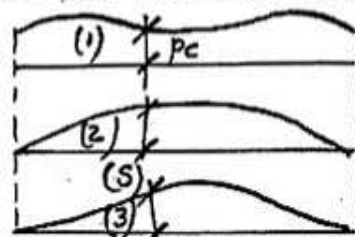
(p_c étant supposé appliqué au centre de torsion de la section considérée).

B_1 et C_1 doivent être calculés pour une section (S) déterminée de la poutre, en tenant compte de la répartition réelle des charges verticales.

Lorsque la répartition n'est pas sinusoïdale on peut

effectuer le calcul de P_c soit directement, comme ci-dessus, soit en considérant des réactions élastiques fictives dont la répartition suit une loi différente : on pourra ainsi faire apparaître une réaction élastique $P'_c = \sqrt{B'_1 \cdot C'_1}$

mais comme ^{et P'_c} il y a proportionnalité dans une section déterminée entre P_c on retrouvera évidemment la même valeur P_c pour cette section en utilisant ce calcul intermédiaire



Pour une charge localisée nous pourrions donc encore écrire :

$$P_c = \sqrt{B_2 \cdot C_2} \quad (175)$$

mais, on fera attention que, dans cette formule B_2 et C_2 n'ont pas les mêmes dimensions que dans la formule précédente.

Ainsi, sous réserve de satisfaire à l'homogénéité des formules, la charge critique (verticale) d'une poutre apparaît, pour le déversement, comme la moyenne géométrique de deux raideurs (pour une section donnée).

Ce résultat, qui découle de l'analogie du flambement en milieu élastique, est à rapprocher de celui que nous avons établi pour les pièces comprimées, pour lesquelles nous avons écrit :

$$N_c = \sqrt{EI \cdot k}$$

ce qui, si l'on considère un élément de hauteur unité et de raideur $C' = EI$ s'écrit

$$N_c = \sqrt{C' \cdot k} \quad (176)$$

On voit de plus que sous sa forme nouvelle, très générale, l'expression de la charge critique de déversement P_c (ou P_2) est valable pour une loi de variation de l'inertie quelconque, le long d'une ligne moyenne rectiligne, et pour des matériaux ne suivant pas nécessairement la loi de HOOKE : il suffit en effet que l'on sache calculer B_1 et C_1 (ou B_2 et C_2), ou les mesurer.

Nous avons ainsi la possibilité d'avoir recours à des essais non destructifs pour déterminer les charges critiques de déversement, en procédant à des mesures de déformation transversales et des mesures d'angles de torsion.

Il y aura lieu toutefois de s'astreindre à appliquer en chaque point des charges transversales (ou des couples élémentaires), suivant la même loi de répartition que les charges verticales auxquelles la poutre doit être soumise.

Remarquons que ce ne sont pas les couples de torsion appliqués aux sections qui sont à répartir suivant cette loi mais leurs éléments différentiels $m_x \cdot dx = dM_x$, la loi de répartition des couples de torsion proprement dits M_x étant l'intégrale des m_x .

Il est remarquable également que les formules ne fassent pas apparaître explicitement les conditions d'appui, qui dans ces conditions peuvent être absolument quelconques, de sorte que ce que nous avons dit, pour des poutres sur appuis simples, avec un encastrement de torsion aux appuis est valable quelles que soient les liaisons d'extrémité, pourvu qu'il en soit tenu compte dans la détermination, par le calcul ou expérimentale, des quantités B_1 et C_1 (ou B_2 et C_2).

Remarque : En résolvant le système d'équations

$$\begin{aligned} p_c y &= C_1 \varphi \\ \text{et } p_c y &= B_1 y \end{aligned}$$

on trouve

$$\frac{\varphi}{y} = \sqrt{\frac{B_1}{C_1}} \quad (I77)$$

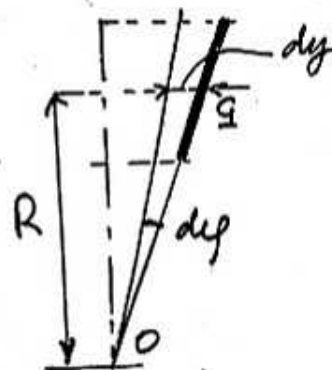
φ et y , reliés par cette relation, sont indéterminés tout comme l'est la déformation transversale d'une tige soumise à ses extrémités à une charge axiale.

Soit R le rayon instantané de rotation de la section (S)

$$\text{On a } \frac{1}{R} = \frac{d\varphi}{dy} = \sqrt{\frac{B_1}{C_1}}$$

d'où

$$R = \sqrt{\frac{C_1}{B_1}}$$



Tout se passe comme si le tronçon de poutre tournait autour du point O tout en prenant appui en Q sur un ressort de raideur B_1 .

Remarque : La charge critique d'une colonne est, nous l'avons vu, donnée par la relation :

$$a p_1 p_2 p_3 + b p_1 p_2 + c (p_1 + p_2) p_3 + d (p_1 + p_2) + 3 b p_3 - b u^2 = 0$$

$$\text{avec } u^2 = \frac{F_c l^2}{EI} \quad ; \quad p_1 = \frac{k_1 l}{EI} \quad ; \quad p_2 = \frac{k_2 l}{EI} \quad ; \quad p_3 = \frac{k_3 l^3}{3 EI}$$

k_1, k_2 et k_3 étant respectivement deux raideurs de rotation et une raideur de déplacement.

Supposons que i est très grand, de telle sorte que u et u^2 étant des infiniment petits, nous puissions remplacer les expressions des coefficients a, b, c, d en fonction de u par le premier terme de leur développement limité :

$$a = \frac{1}{4} u^4 \quad ; \quad b = c = d = u^4$$

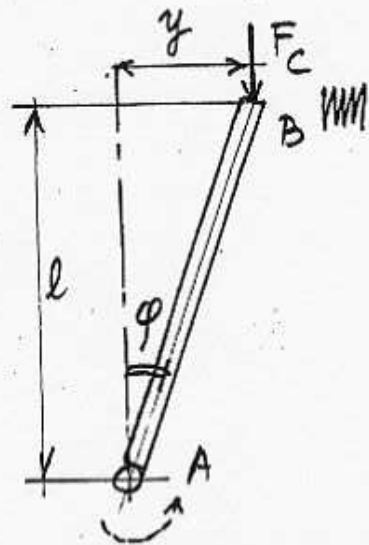
Les termes produits de p_1, p_2, p_3 disparaissent et il reste

$$d (p_1 + p_2) + 3 b p_3 = b u^2 = \frac{F_c l^2}{EI}$$

ou, en simplifiant :

$$F_c = \frac{k_1 + k_2}{l} + k_3 l \quad (I79)$$

Cette relation découle d'ailleurs directement de l'équilibre de la colonne d'inertie I comme on le voit d'après la figure ci-contre :



En effet : si $P = k_3 y$ et

$$\mu_1 = k_1 y = k_1 \frac{y}{l} \quad \text{et} \quad \mu_2 = k_2 y = k_2 \frac{y}{l}$$

l'équation d'équilibre de la colonne donne, en égalant les couples en A

$$F_c \cdot y = (k_1 + k_2) y + k_3 y l$$

ou, compte-tenu de $y = l \phi$

$$F_c = \frac{k_1 + k_2}{l} + k_3 l \quad (I79)$$

La réaction horizontale en A est $P = -k_3 y$
 l étant donné, F_c est maximal si l'on a $\frac{k_1 + k_2}{l} = k_3 l$

d'où

$$l_c = \sqrt{(k_1 + k_2) k_3} \quad (I80) a$$

et la charge critique est alors double de celle de la colonne articulée.

Inversement, si F_c est donné, la valeur critique de l est donnée par

$$\frac{dF_c}{dl} = -\frac{(k_1 + k_2)}{l^2} + k_3 = 0$$

d'où

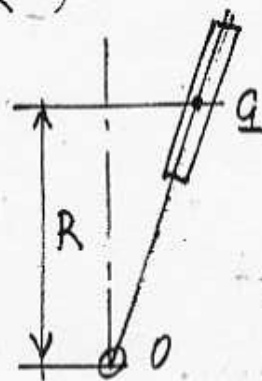
$$l_c = \sqrt{(k_1 + k_2) k_3} \quad (I80) b$$

Les grandeurs C_1 et B_1 que nous avons considérées dans le cas du déversement d'une poutre sont de même nature que les coefficients de raideur $(k_1 + k_2)$ et k_3 .

La rotule A est alors virtuelle, ce qui entraîne ipso-facto que $B_1 \cdot R = \frac{C_1}{R}$ (avec $l = R$)

d'où, comme nous l'avons

$$\text{établi autrement : } R = \sqrt{\frac{C_1}{B_1}}$$



$$\text{La charge critique est } p_c = \frac{1}{2} \left(\frac{C_1}{R} + B_1 R \right) = \frac{1}{2} \sqrt{B_1 C_1}$$

Tout se passe comme si nous avions une colonne de hauteur $l = R$, articulée en O , et maintenue latéralement au niveau du centre de gravité de la section par un ressort de raideur $k_3 = B_1$; k_1 et k_2 étant nuls, (ou réciproquement k_3 et $k_1 + k_2 = C_1$).

Cette analogie très simple nous donne du même coup la possibilité d'introduire dans les formules de déversement l'effet de la flexion de l'âme autour d'un axe horizontal : en effet, I ayant maintenant une valeur finie non nulle, on a, en première approximation :

$$u^2 \left(1 + \frac{p_1 + p_2}{3} \right) = 1 + 3p_3 + p_1 p_2 + p_2 p_3 + p_3 p_1$$

expression qui donne u^2

et connaissant I : $p_c = \frac{F_c}{2} = \frac{F_c l^2}{2EI}$

On pourra également utiliser cette analogie pour étudier la charge critique de déversement d'une poutre dont la ligne moyenne est un arc très surbaissé. On calculera les coefficients de souplesse au niveau de l'axe de rotation réel de la poutre et on procédera comme pour une poutre à ligne moyenne rectiligne.

On retrouverait ces résultats dans toute leur généralité en faisant appel à l'analyse dimensionnelle, et au théorème de VASCHY-BUCKINGHAM. Il est en effet toujours possible de grouper les paramètres d'un phénomène physique de façon à n'avoir dans les relations qui les relient que des coefficients sans dimensions.

Si la charge p est appliquée à une distance d au dessus du centre de torsion, les équations (173) deviennent

$$\left. \begin{aligned} \overline{p}_c \cdot (y + q \cdot d) &= C_1 \cdot q \\ \overline{p}_c \cdot q &= B_1 \cdot y \end{aligned} \right\} \quad (181)$$

d'où $\overline{p}_c = \sqrt{B_1 C_1} \cdot \sqrt{1 - \frac{\overline{p}_c \cdot d}{C_1}} \quad (182)$

relation de même forme que la formule (15)

On a alors :

$$\left(\frac{q}{y} \right)^2 = \frac{B_1}{C_1} + \left(\frac{q}{y} \right) \cdot \frac{B_1 \cdot d}{C_1} \quad (183)$$

(équation du 2^e degré en q/y)

Un défaut géométrique a d'alignement de la poutre, ou de la membrure chargée produit un couple $p_c \cdot a$, (qui peut

varier le long de la poutre).

Les équations (I78) deviennent :

$$\left. \begin{aligned} p \cdot (y + y_1 \cdot d + a) &= C_1 \cdot \varphi \\ p \cdot \varphi &= B_1 \cdot y \end{aligned} \right\} \quad (I84)$$

posons $p/p_c = \rho$ (I82) avec $p_c = \sqrt{B_1 C_1}$

En résolvant ces 2 équations linéaires par rapport à φ et à y , nous trouvons les valeurs suivantes de la rotation et du déplacement transversal au niveau du centre de torsion.

$$\varphi_1 = \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{B_1}{C_1}} \cdot y_1 \quad \text{avec} \quad y_1 = a \frac{\rho^2}{1 - \rho \cdot d \sqrt{\frac{B_1}{C_1}} - \rho^2} \quad (I85)$$

La valeur de y_1 , devant être positive, on voit que l'expression de ρ est bornée supérieurement par la racine positive de l'équation

$$1 - \rho \cdot d \sqrt{\frac{B_1}{C_1}} - \rho^2 = 0$$

soit
$$\rho_0 = \sqrt{1 + \frac{d^2 B_1}{4 C_1}} - \frac{d}{2} \sqrt{\frac{B_1}{C_1}} \quad (I86)$$

Connaissant ρ , on peut calculer facilement les expressions :

$$\frac{\varphi_1 \cdot d}{a} = \rho \cdot y_1 \cdot \sqrt{\frac{B_1}{C_1}} \quad ; \quad \chi = \frac{a + y_1}{a} \quad (I87)$$

analogues aux "coefficients d'amplification" rencontrés dans l'étude des poteaux.

Si ρ est petit par rapport à l'unité on peut écrire, en première approximation :

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_1 \cdot d}{a} &\approx \rho \cdot d \cdot \sqrt{\frac{B_1}{C_1}} \cdot \left(1 - \rho d \sqrt{\frac{B_1}{C_1}}\right)^{-1} \quad \text{et} \\ \chi &= 1 + \rho^2 \cdot \left(1 - \rho d \sqrt{\frac{B_1}{C_1}}\right) \approx 1 + \rho^2 \end{aligned} \quad (I88)$$

Si l'on veut un coefficient de sécurité de 4, il faudra limiter le coefficient χ à environ 1,06.

Les résultats ci-dessus établissent clairement la liaison, du point de vue physique, entre les phénomènes de flambement simple et de déversement grâce à l'analogie fondamentale avec le flambement en milieu élastique.

En outre comme pour le cloquage, nous avons la possibilité de transposer simplement les formules pour des matériaux ne suivant pas la loi de HOOKE ou élastoplastiques et en particulier de définir une méthode pratique de détermination des Armatures à prévoir dans les poutres en béton armé ou en béton précontraint, de grande finesse de forme, telles que celles que l'on commence à rencontrer dans les industries de la préfabrication.

Nous achèverons sur cette conclusion notre tour d'horizon sur les problèmes d'instabilité des éléments de construction souhaitant qu'il trouvera un écho favorable chez les constructeurs et contribuera, comme il semble qu'on soit en droit de s'y attendre, au progrès des applications industrielles.

Les méthodes utilisées peuvent évidemment être appliquées, non seulement aux éléments de structure isolés tels que ceux que nous venons d'examiner, mais aussi aux ensembles d'éléments d'une construction, sous réserve de faire intervenir dans les calculs toutes les raideurs mises en jeu (positives ou négatives), et l'effet des charges appliquées aux nœuds.

A N N E X E

FLAMBEMENT - ANALYSE DIMENSIONNELLE

I°/ FLAMBEMENT SIMPLE :

$$N = f(l, I, E)$$

Charge : $[N] = MLT^{-2}$

Longueur : $[l] = L$

Inertie : $[I] = L^4$

Module d'élasticité $[E] = ML^{-1}T^{-2}$

	N	l	I	E
M	1	0	0	2
L	1	x	4y	-2
T	-2	0	0	-22

$$z = 1$$

$$x + 4y - z = 1$$

$$z = 1$$

d'où

$$y = \frac{2-x}{4}$$

2 éq. indépendantes, 3 inconnues (x, y, z)

2 nombres adimensionnels :

La similitude géométrique conduit à prendre le produit

$$\Pi_1 = \frac{I}{l^4}$$

d'où

$$x = -2$$

$$y = +1$$

$$N = \frac{EI}{l^2} \cdot C \frac{I}{l^2}$$

ou

$$\frac{N}{EI} = A \frac{I}{l^4}$$

(A sans dimension)

Introduisons le coefficient de ballast k d'un milieu élastique extérieur :

soit q les forces fictives de rappel :

$$q = ky$$

soit R le rayon de courbure en un point de la déformée :

$$\frac{1}{R} = \frac{Ny}{EI}$$

et

$$N = qR$$

d'où

$$q = \frac{EI}{R^2 y} = ky$$

$$k = \frac{EI}{R^2 y^2}$$

$$N = q \cdot R = \frac{EI}{R y} = \sqrt{EI k}$$

On retrouve ce résultat par l'analyse dimensionnelle :

$$[k] = ML^{-1}T^{-2}$$

$$[E] = ML^{-1}T^{-2}$$

$$[I] = L^4$$

$$N = E^\alpha I^\beta k^\gamma$$

	N	E	I	k
M	1	α	0	γ
L	1	$-\alpha$	4β	$-\gamma$
T	-2	-2α	0	-2γ

$$\begin{aligned}\alpha + \gamma &= 1 \\ -\alpha + 4\beta - \gamma &= 1 \\ -2\alpha - 2\gamma &= -2\end{aligned}$$

on peut prendre $\alpha = \gamma = \beta = \frac{1}{2}$

2°/ PIEUX DE LONGUEUR INDEFINIE, mâts situés dans un milieu élastique :

$$P = A \sqrt{EI k}$$

A = constante : pour les pieux très longs : $A = 2$
pour les mâts, A tend vers l'unité
si β est très grand

$$[I] = L^4$$

$$[E] = ML^{-1}T^{-2}$$

$$[k] = ML^{-1}T^{-2}$$

(coefficient de ballast)

(comme pour les pièces comprimées)

3°/ PLAQUES :

$$P = A' \sqrt{EI k'}$$

$$[I] = L^3 \text{ (inertie par unité de largeur)}$$

$$[E] = ML^{-1}T^{-2}$$

$$[k'] = ML^{-2}T^{-2}$$

$$[P] = MT^{-2} \text{ (force par unité de longueur)}$$

4°/ CLOQUAGE : $\sigma_a = \frac{3}{5} \frac{Eh}{\lambda \sqrt{3(1-\nu^2)}} \quad m_a = h\sigma_a = \frac{3}{5} \frac{Eh^2}{\lambda \sqrt{3(1-\nu^2)}}$

$$[\sigma] = ML^{-1}T^{-2}$$

$$[E] = ML^{-1}T^{-2}$$

$$[h] = L$$

$$[\lambda] = L$$

	σ	E	h	λ
M	1	α	0	0
L	-1	$-\alpha$	γ	z
T	-2	-2α	0	0

$$\begin{aligned}z &= 1 \\ -\alpha + \gamma + z &= -1 \\ \alpha &= 1\end{aligned}$$

avec $y = -z$ (similitude géométrique)

$\alpha = y = 1$ et $z = -1$

Coefficient de raideur (module de déformation) $k' = \frac{Eh}{\lambda^2(1-\nu^2)}$ avec $p = k'y$

$$[p] = ML^{-1}T^{-2}$$

$$[k'] = ML^{-1}T^{-2}$$

Coefficient de raideur de flexion
(par unité de longueur)

$$Ei = \frac{1}{12} h^3 \cdot E$$

$$[EI] = ML^2 T^{-2}$$

$$[m_a] = [k' EI]^{\frac{1}{2}} = MT^{-2}$$

$$[\sigma_a] = ML^{-1} T^{-2}$$

5°/ DEVERSEMENT : $P_a = \sqrt{B_1 C_1}$

B_1 est un coefficient de raideur de flexion

C_1 est un coefficient de raideur de torsion

p est une charge répartie (critique)

On a $q = B_1 y$ (q : charge)

$m = C_1 y$ (m : moment)

Dimensions :

$$[q] = MT^{-2}$$

$$[m] = MLT^{-2}$$

$$[B_1] = ML^{-1} T^{-2}$$

$$[C_1] = MLT^{-2}$$

$$[P_a] = MT^{-2}$$

$$[B_1 C_1]^{\frac{1}{2}} = MT^{-2}$$

(q est une réaction latérale fictive, ou une charge directement appliquée).

Avec des charges (ou réactions), et moments localisés :

$$P_a = \sqrt{B_2 C_2}$$

$$Q = B_2 y$$

$$M = C_2 y$$

$$[B_2] = MT^{-2}$$

$$[C_2] = ML^2 T^{-2}$$

$$[P_c] = MLT^{-2}$$

$$[B_2 C_2]^{\frac{1}{2}} = MLT^{-2}$$

BIBLIOGRAPHIE SUR LE FLAMBEMENT

I. DU MEME AUTEUR

- (1) - C. BOURDON : Flambement des pieux en milieu élastique.
Flambement des enveloppes coniques
Le Génie Civil - Mars 1969
- (2) - C. BOURDON, A. CAPRA, G. CZITROM : Considérations sur
la stabilité des poutres et poteaux en béton armé. Ma-
tériaux non élastiques.
Document SOCO T.EC AT./SMB/1.70/IO68 du 21.12.1970
- (3) - C. BOURDON : Flambement des coques.
Le Génie Civil. Décembre 1971
- (4) - C. BOURDON : Discussion sur la stabilité des pieux et des
coques .
(préfacé par Mr. le Professeur STUCKY)
Bulletin Technique de la Suisse Romande
N° 15 22 Juillet 1972
N° 25 Décembre 1972
- (5) - C. BOURDON : Généralisation de la théorie d'Euler du
flambement des pièces rectilignes comprimées
Le Génie Civil n° 1 et 2 Janvier-Février 1973
et n° 4 Avril 1973
- (6) - C. BOURDON : théorie des empilages élastiques *Mammies*
de l'Association internationale des
Ponts et charpentes
Bull. n° 35. II Zurich 1975
- (7) - C. BOURDON: *la stabilité au déversement des ponts*
Le Génie Civil n° 2 - Février 1976.

II HISTORIQUE

- (7) Leonhardo EULERO : Methodus inveniendi lineas curvas
maximi minimive proprietate gaudentes
M.C BOUSQUET & Assoc.
LAUSANNE et GENEVE 1744
- (8) LAGRANGE : Sur la force des colonnes - Mémoire de
l'académie de Berlin T XIII 1757 - 1759
Miscellanea Taurinensia
Oeuvres de Lagrange, par Sevret
- (9) Melle Sophie GERMAIN - Recherches sur la théorie des
surfaces élastiques
Mme Vve Courcier Paris 1821
du même auteur : Remarques sur la Nature, les bornes et
l'étendue de la question des surfaces élastiques et équation
générale de ces surfaces.
Huzard - Courcier Paris 1826
- (10) RAYLEIGH : Theory of elastic surface waves
Proceedings London Math Society vol.17.1887
- (11) CONSIDERE : Résistance des pièces comprimées.
Congrès International des procédés de
construction - vol.3 Paris 1891
- (12) E. CALLANDREAU : Histoire sommaire et orientation actuelle
de la résistance des matériaux
Techniques de l'Ingénieur
- (13) TIMOSHENKO : History of Strength of materials

III. ARTICLES ET OUVRAGES EN LANGUE FRANCAISE

- (14) TIMOSHENKO : Stabilité des systèmes élastiques.
Annales des Ponts & Chaussée 1913 (III, IV, V)
- (15) ROCS : La stabilité des barres comprimées par les forces
concentrées
ZURICH
- (16) R. CHAMBAUD : La stabilité au flambement des grands barra-
ges à contreforts
Travaux - Février 1937
- (17) R. CHAMBAUD : Le rôle des théories élastiques du second
ordre dans le calcul des ponts en arc de grande portée
Annales de l'ITBTP 1941
- (18) TIMOSHENKO : Théorie de la stabilité élastique
Traduction A. de Riva Berni
Librairie Polytechnique Beranger Paris et Liège
1947
et du même auteur : Théorie de la flexion, torsion et
flambage des barres à parois minces et à section constante
Ossature métallique 7 - 8 - 9 1947
- (19) BESCHKINE : Théorie de la flexion torsion des profils
ouverts
Annales de l'ITBTP série I n° 39 25.11.1947
- (20) M.J. DUTHEIL : Le flambement et le déversement
Annales de l'ITBTP n° 218 - Novembre 1951
(série CM n° 8)
- (21) M. DUTHEIL : L'évolution des règles d'utilisation de l'acier
Mémoires de la Société des Ingénieurs Civils
de France - Fasc.III Juillet - Septembre 1954
- (22) M.ROCARD : L'instabilité en mécanique
Masson 1954
- (23) J.R. ROBINSON : Les nouvelles règles du béton armé
Annales des ponts & Chaussées n° IV 1955
- (24) Pierre LEBELLE : Stabilité élastique des poutres en béton
précontraint à l'égard du déversement latéral.
Annales de l'ITBTP n° 141 Septembre 1959
(Série B.P n° 32)
- (25) Compression excentrée et flambement des poteaux rectangu-
laires en béton armé par le calcul à la rupture
Annales des Ponts & Chaussées Sept-Oct. 1960
(exposé de la méthode de M. Aas JAKOBSEN)
- (26) E. ABSI : Effets des efforts tranchants et normaux. Stabi-
lité au flambage.
Annales de l'ITBTP n° 197 Mai 1964
série théories et méthodes de calcul (60)
- (27) L. VIRONNAUD, J.BROCARD, M. MAMILLAN : Etat actuel de quel-
ques recherches concernant les maçonneries
Annales de l'ITBTP n° 217 Janvier 1966
Série Matériaux (n°27)
- (28) A.C.E (1963). Essais sur des colonnes de béton armé
(traduction par L.P SAENZ et I.MARTIN)
Revue Béton armé Janv. Fév. Mars 1966

- (29) F.I.P. (5ème congrès) Poteaux précontraints 1966
- (30) KUKULUSKI, J. LUGEZ : Résistance des murs en béton non armé soumis à des charges verticales
Cahiers du CSTB n° 79 Avril 1966
- (31) E. ABSI : Equations intrinsèques d'une poutre droite à section constante, compte tenu des efforts tranchants et normaux
Annales de l'ITBTP n° 229 Janvier 1967
Série théories et méthodes de calcul (81)
- (32) R. DAUSSY : Guide pratique de charpente métallique
ch. VII, XV
Société de Diffusion du Bâtiment et des T.P
- (33) B. FOURE et A. SAHEBDJEM : Flambement de poteaux carrés en béton armé chargés en dehors de leur plan de symétrie
Annales ITBTP n° 246 Juin 1968 p.918
- (34) C. LEONTE et Anatolie MIHUL : Considérations sur les coupes sphériques aplaties, avec l'anneau d'appui précontraint
Bulletin de l'Institutulul Politehnic "
tome 14, fasc 1 - 2 1968
- (35) J.R ROBINSON et S.S MODJABI : La prévision des charges de flambement des poteaux en béton armé par la méthode de M.P FAESSEL
Annales de l'ITBTP n° 249, Septembre 1968
(supplément, série béton, béton armé n° 98)
- (36) E. ABSI : Souterrains et revêtements circulaires
Annales ITBTP n° 251 Novembre 1968
Série théories et méthodes de calcul n° 99
- (37) STEINGER et SOULOUMIAC : (CTICM) Pièces symétriques à parois pleines sollicitées en flexion compression (abaque)
Construction Métallique n° 1 Mars 1969
- (38) J.FOUCRIAT : A propos de l'étude théorique du flambement des barres réelles
Construction métallique n° 4 1970
- (39) GACHON : Développements actuels des méthodes d'étude des poutres à ailes minces élancées
Annales ITBTP n° 278, Février 1971
- (40) J. MOUTY : Calcul des longueurs de flambement des éléments des poutres à treillis Monographie n° 2
PARIS CIDECT 1971 31 cm 120 p
- (41) P.FAESSEL, J.R. ROBINSON, A MORISSET : Tables d'états limites ultimes des poteaux en béton armé
Société de Diffusion des techniques du bâtiment et des travaux publics 1971
- (42) A. CAPRA : Calcul du flambement des poteaux en béton armé
SOCOTEC Direction des affaires techniques
Service de l'informatique Octobre 1971
- (43) L. GEMINARD et A. GIET : Stabilité des constructions
DUNOD 1971
- (44) V. GUILLOT : Etude des oscillations libres ou forcées des systèmes élastiques pesants dépourvus de frottements internes
Stabilité de l'équilibre élastique
Annales de l'ITBTP n° 293 Mai 1972
supplément n° 150, série théories et méthodes de calcul

- (45) M. ALBIGES et J. DESPEYROUX : Application de la méthode de calcul de MM. FAESSEL, ROBINSON et MORISSET
SOCOTEC - Instruction Technique n° 72 - 3
du 30 Mars 1973
- (46) J.P. MEROT : Stabilité de l'équilibre élastique
Techniques de l'Ingénieur A 310 I
- (47) P. FAESSEL, A. MORISSET et B. FOURE : Le flambement des poteaux en béton armé
Annales de l'I.T.B.T.P n° 305 Mai 1973
supplément n° 157 série théories et méthodes de calcul.
- (48) J. TUSET, J. PERA et J.C. CUBAUD : Etude de modèles réduits de structures en micro-béton armé (INSA de Lyon)
Bulletin technique de la Suisse Romande
n° 12 9 Juin 1973
- (49) E. VIRLOGEUX : Contribution à l'étude du flambement dans le domaine plastique.
Annales de l'ITBTP n° 312 - Décembre 1973
supplément n° 164, série théories et méthodes de calcul.
- (50) Ali Asghar HAERI : Stabilité au flambage des structures pleines
Annales de l'ITBTP n° 316 - Avril 1974
supplément n° 167 série théories et méthodes de calcul
- (51) A.I.P.C. : Symposium dimensionnement et sécurité des pièces comprimées en béton armé
QUEBEC 1974
- (52) R. L'HERMITE : Flambage et stabilité
EYROLLES - PARIS 1974

Voir aussi :

- FIGEAUD : Résistance des matériaux 3è ed. 1948
chap.XIX et p.479, 485, 493, 499
- Bulletins du Comité Européen du Béton traitant du flambement : n° 62, 63, 69, 77, 79, 93, ...
- Revue française de mécanique

IV. ARTICLES ET OUVRAGES EN LANGUE ANGLAISE

- (53) HJALMAR GRANDHOLM : On the Elastic Stability of Pipes Surrounded by a supporting Medium
Ingeniörs Vetenskaps Akademien
Handlingar n° 89 STOCKHOLM 1929
- (54) SHANLEY : Inelastic Column theory
Journal of the Aeronautical Sciences Mai 1947
- (55) F. BLEICH : Buckling Strength of Metal Structures
Mc. Graw Hill N.Y 1952
- (56) G.P.R. VON WILLICH : The elastic stability of thin spherical shells
Proceedings of the ASCE - Engineering mechanics divisions vol.85 January 1959
Discussions
- (57) G.LEE.G.C : Literature survey on lateral instability and lateral bracing requirements.
Fritz Eng lab Report n° 205 H2 Oct.1959
- (58) COLUMN RESEARCH COUNCIL : Guide to design Criteria for metal compression Members.
J.WILEY & Sons Inc. N.Y 1966
- (59) Z. WESOLOWSKI : Stability of an elastic, thick walled spherical shell, loaded by an external pressure.
Archivum Mechaniki Stosowanej 1.19.1967
- (60) ACI : Building Code Requirements for reinforced concrete (318 - 63)
ACI : Publ. SP 10 p 21
ACI : Manual of Concrete Practice 1968 Part 2
- (61) SOUTHWARD R.R : Inelastic Column stability PhD thesis
Univ. of CAMBRIDGE 1968
- (62) SANFORD B. ROBERTS : Buckling and vibrations of Polygonal and Rhombic Plates
ASCI Journal of the Eng. Mech. Div April 1971
- (63) K. THOMAS : Composite actum of brickwalls supported on reinforced concrete beams (Structure brickwork materials and performance)
The structural Eng. Oct. 1971
- (64) W.F CHEN, T.ATZUFA : Column curvature curve method for analysis of beam columns
The Structural Engineer n° 6 June 1972
- (65) Ir.A.L BOULA : The stability of tall building designed as frameworks of reinforced or non reinforced concrete
I.C.E Monthly - Vol II n° 5 1971 - 1972
- (66) J.E BREEN J.G. MAC GREGOR E.O.P frang : Determination of effective length factors for slender concrete columns
ACI Journal Nov. 1972
- (67) J.JAY CLIMENHAGA R. Paul JOHNSON : Local buckling in continuous composite beams
The structural Engineer n° 9 Sept. 1972
- (68) C.R. CALLADINE : A plastic theory for collapse of plate girders under combined shearing force and bending moment
The structural Engineer n° 4 April 1973
Discussion n° 7 July 1973 by M.R.MORRIS et J.L AJEMANI.

- (69) D.A. NETHER COT, K.C. ROCKEY - Lateral buckling of beams with mixed end conditions
The structural Engineer n° 4 April 1973
- (70) B.W. YOUNG - Steel column design
The structural Engineer n° 9 Septembre 1973
- (71) A.E.O. SOBOYEJO : Stochastic analysis for time dependant load transfer in reinforced concrete columns.
Revue Matériaux et constructions n° 34 1973
- (72) CHOVICHLEN, J. GUTZWILLER and R.H. LEE : Analysis of reinforced concrete columns under sustained load
ACI Journal - October 1973
- (73) S.E. SWARTZ V.H. ROSEBRAUGH, M.Y. BERBAS : Buckling tests on rectangular concrete panels
ACI Journal - January 1974
- (74) R.H. WOOD : Effective lengths of column in multistorey buildings
The structural engineer n° 7,8,9
July, August, September 1974
- (75) S. VINNAKOTA and Y. AOSHIMA : Inelastic behaviour of rotationally restrained columns under biaxial bending.
The Structural Engineer n° 7 July 1974

Consulter également les publications suivantes :

- Journal of Applied Mechanics (USA)
- The Royal Aeronautical Society - Engineering sciences data (GB)
- The Aeronautical Quarterly (GB)
- Journal of materials (USA)
- Journal of Spacecraft and Rockets (USA)
- ASME Papers (USA)
- A.I.A.A. Journal (USA)
- Experimental Mechanics (USA)
- NASA Technical notes

V. ARTICLES ET OUVRAGES EN LANGUE ALLEMANDE

- (76) Luigi VIANELLO : Untersuchungen der Knickfestigkeit
gerader Stäbe
Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieur
42 pt.2 1898
- (77) L.PRANDTL - Thèse NUREMBERG 1899
- (78) A. VOELLMY : Erddruck auf elastisch eingebette Rohre
International Association for Bridge and Structural
Engineering Publication.
ZURICH 1936 59I 6II
- (79) J. RATZERNSDORFER : Die Knickfestigkeit von Stäben und
Stabwerken (Wien 1936)
- (80) Dr.Ing M.J GERCKE : Die Verallgemeinerung der Eulerschen
Knickformel
Der Bauingenieur - Heft 12 1952
- (81) Von K.F. BUCHERT : Zur Stabilität grosser, doppelt
gekrümmter und versteifter Schalen
Der Stahlbau 2/1965
- (82) Harald Zrost : Beitrag zur Berechnung der flachen
Kugelschale
Wissenschaftliche Zeitschrift der Hochschule für
Architektur und Bauwesen-Weimar Heft 1 - 1966
- (83) Dr Ing.Hartwig MAKELT : Kurtzleitfaden durch die neuen
Stahlbeton Bestimmungen (DIN 1045)
Bauverlag GMBH - WIESBADEN und BERLIN März 1968
- (84) VORTRAGE BETONTAG 1969 : Stabilität und Werkstoffverhalten
im Stahlbetonbau p.169
Deutscher Beton Verein E.V 1969

Consulter aussi :

- Institut für Luftfahrzeugbau. Technische Universität
Berlin Jahrbuch 1967/68
- Deutsche Luft und Raumfahrt

VI. ARTICLES ET OUVRAGES EN LANGUE ITALIENNE

- (85) Franco LEVI Luigi GOLFI : Discussion e controllo di un
calcolo flessionale di cupole sferiche
Giornale del Genio Civile - Janv. à Avril 1958
- (86) STABILINI : Problemi di instabilità nel campo delle
costruzioni in acciaio
Costr. Metall Ital. Janv. Fev. 1960 n° 1
Mai Juin n° 3
Juillet Aout n° 4

VII. AUTRES ARTICLES PUBLIES PAR Mr. Claude BOURDON

- (87) Le calcul des batardeaux cellulaires
Le Génie Civil Juin 1955 et Avril 1957
- (88) Le Calcul des barrages évidés et à contreforts
Mémoires de la Société des Ingénieurs Civils
de France n° V Septembre Décembre 1959 (1)
- (89) Contributions au calcul des chambres d'équilibre à
étranglement.
Le Génie Civil - Septembre 1960
- (90) Remarques pratiques sur le calcul des barrages-voûtes
Le Génie Civil - 15 Juillet 1961
- (91) Problèmes d'élasticité plane et de poussée des terres
Le Génie Civil - Août 1967

(1) Article également paru en Portugais, sous le titre :
O calculo das barragens aligeiradas et de contrafortes
Rev. Sind. Nac. Eng. Aux... Julho 1961

BIBLIOGRAPHIE COMPLÉMENTAIRE SUR LE FLAMBEMENT

EN FRANÇAIS :

- R. CHAMBAUD : Résistance au flambement des pièces courbes et des pièces fléchies
Travaux. Mars 1939
- R. CHAMBAUD : Flambement des Arcs
Le Génie Civil. 1er Février 1930
Annales ITBTP. Circulaire I n° 1 25 Mars 1941
- STÜSSI : Déversement et vibrations latérales des arcs
Assoc. Int. Ponts & Charpentes Mémoires 7è vol.
1943-44 p. 327-344
- KOLLBRUNNER : Stabilité des plaques minces comprimées dans le domaine élastique et plastique (essais)
Assoc. Int. Ponts & Charpentes Mémoires 7è Vol.
1943-44
- BAZANT : La sécurité au flambement des membrures comprimées de pont, sans contreventement supérieur.
Assoc. Int. Ponts & Charpentes. Mémoires 7è vol.
1943-44 p.49-60
- PATRIARCHE : Contribution à l'étude du flambement des pièces encastrees et appuyées.
L'ossature métallique Nov.Déc.1946 p.288-290
- LAUBEUF : Etude théorique du flambage
Inst.techn.Bât.et TP. Circulaire série I n° 30
21 Octobre 1946
- A. LAZARD : Flambement en milieu élastique discontinu.
Efficacité d'un dispositif de contre-flambage
Annales des Ponts & Chaussées Mai-Juin 1946
n° 116
- ANGLES D'AURIAC : Flexion et flambage des conduites
La Houille Blanche n° 3 1947
- DUBAS : Contribution à l'étude du voilement des tôles raidies
3è Congrès de l'Assoc.Int.des Ponts & Chaussées
Liège 1948 (Pub.n° 3 RPF Zurich)
- AIPC : Rapport final du 3ème Congrès de l'Assoc.Int.des Ponts & Charpentes Liège Sept.1948 - (Pub.n°3 EPF - Zurich).
- M.G SALVADORI : Calcul numérique des charges de voilement par la méthode des différences finies.
Proc.Assoc. S.C.E n° 75 Déc. 1949
- A. LAZARD : CR d'essais sur le flambage d'une tige posée sur supports élastiques équidistants.
Annales ITBTP n° 88 Essais et mesures Sept. 1949
- HAHN : Flambage des anneaux circulaires dans un milieu élastique.
Mémoires de l'Assoc.Int.des Ponts & Charpentes
IIè vol. 1951
- J. DUTHEIL : Etude sur le flambement des tubes
L'ossature métallique. Fév. 1951
- J. DUTHEIL : Les barres élancées à section en caisson à parois minces.
Mémoires de l'Assoc.Intern. des Ponts & Charpen-
tes - 11 vol. 1951 p. 375 - 389

- KARPINSKI : Moyen nouveau pour augmenter la capacité portante d'une barre chargée en bout
Mém.Assoc.Intern.Ponts & charpentes 11 Vol. 195
p. 291 - 302
- MASSONNET : Résistance au voilement des poutres à âme pleine.
Congrès Int. Ponts & Charpentes - Londres 1952
- VAN der EB : Etude du flambage en certains cas particuliers
4è Congrès Int. Ponts & Charpentes - Londres 1952
- N. DEWULF : La résistance au flambement des conduites frettées.
Le Génie Civil - 16 Août 1952
- MA MIN YUAN : Sur l'équilibre des enveloppes coniques minces soumises à la pression hydrostatique.
CR. Acad.Sc. - séance 9 Mars 1953
- N BACHET : Calcul des barres comprimées
Travaux - Mai 1953
- M. JUILLARD : Problèmes de flambement concernant les barres droites, les segments de cercle et les cylindres.
Schweizerische Bauzeitung (n° 32, 33 et 34)
9, 16, 23 Août 1952

EN ANGLAIS :

- Friedrich BLEICH : Buckling strength of metal structures
" " : Le flambement des colonnes encastrees
dans un massif elastique :
Assoc. Intern. Ponts & Charpentes 7è Vol. 1943-44
p 277 - 292
- H.J. COWAN : Le calcul des colonnes en beton arme soumisees
à des charges excentrees
Civil Eng. & public works review n° 552 Juin 1952
- N. GROSS: P.H.R Lane. Contraintes dans les fonds bombes de
reservoirs cylindriques en tôle
Engineering n° 4511 II Juillet 1952
- K.C. ROCKEY : Problemes de stabilite associes au calcul des
ames planes de poutres
Civil Eng. & Publ. Works Review (G.B)
Dec. 1952 Janv. 1953 (voir travaux Mai 1953)
- NYLANDER : torsion Bending & lateral buckling of I Beams
Coll. Acta Polytechnica Acad. Royale de Suède
STOCKHOLM
- B. HAMILTON : Le developpement historique de la theorie
de la stabilite des constructions
Proc. Inst. C.E Dec. 1952
- B. BROMS I.M VIEST : Ultimate strength of hinged columns.
Ultimate strength analysis of restrained columns, and design
ASCE Transactions paper 31 ST (1961)
- W.H. GARDNER D.M. KLINE : Charts for design of reinforced
concrete columns
ASCE transactions paper 3192
- GOLDBERG : Buckling of one -storey frames and buildings
ASCE transactions paper 3198

EN ALLEMAND :

- TOLKE : Problèmes de stabilité des coques cylindriques
Ingénieur Archiv. vol.3 1932
- BRUNNER : Stabilité au flambement de la membrure supérieure
d'un pont couvert à sa partie supérieure
Schweizerische Bauzeitung 67 17 Sept. 1949
- R. HABICHT : Calcul simplifié au flambement des pièces en
B.A
Die Bautechnik 27 Mai 1950
- W. BULTMANN : Résolution par itération des problèmes de
flambement plan.
Der Stahlbau 21 n° 7 Juillet 1952
- KROMM : Poussée critique dans une plaque rectangulaire
raidie par une nervure diagonale
Der Stahlbau Oct. 1952

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

Page 1

1ère Partie : GENERALISATION DES RESULTATS CLASSIQUES D'EULER

I/ Cas des pièces constituées par un matériau parfaitement élastique

a) pièces axialement chargées;

Page 3

b) pièces comprimées et fléchies

" 13

II/ Généralisation aux matériaux réels
Cas du béton armé

" 20

2ème Partie : THEORIE SIMPLIFIEE DES EMPILAGES ELASTIQUES

I/ Considérations générales

" 28

II/ Etablissement de l'équation différentielle de la ligne moyenne déformée d'un empilage d'éléments rectangulaires

" 30

III/ Equilibre fléchi d'une pile axialement chargée de hauteur l (non armée)

" 33

IV/ Empilage élastique soumis à une charge N avec une excentricité a

" 38

V/ Passage de la théorie simplifiée des empilages élastiques à celle des poteaux en béton armé

" 45

VI/ Prise en compte de la résistance du béton à la traction

" 49

VII/ Cas des poteaux "Précontraints"

" "

VIII/ Prise en compte du poids propre dans la théorie de la stabilité élastique des empilages

" 51

IX/ Applications et perspectives

" 52

3ème Partie : FLAMBEMENT DES PIEUX DANS UN MILIEU ELASTIQUE HOMOGENE ET APPLICATIONS

" 53

I/ Application analogique de la théorie des pieux aux plaques chargées dans leur plan

" 55

II/ Application analogique de la théorie des pieux aux coques minces homogènes

" 57

III/ Coques en béton armé

" 61

4ème Partie : STABILITE AU DEVERSEMENT DES POUTRES

I/ Equations classiques généralisation, applications

" 65

II/ Interprétation du déversement au moyen de l'analogie avec le flambement en milieu élastique

" 73

ANNEXE : Flambement, Analyse dimensionnelle

" 82

BIBLIOGRAPHIE

" 85

TABLE DES MATIERES

" 95

PRINCIPALES REALISATIONS

" 96

PRINCIPALES REALISATIONS AUXQUELLES L'AUTEUR

A PRETE SON CONCOURS

PONTS :

- Pont Sainte Barbe à METZ (cintre)
- Pont d'Arpiat sur la Dordogne (cintre)
- Pont de Courbevoie sur la Seine (culées)
- Passerelles du barrage de Mallemort sur la Durance
- Pont sur le Canal d'Asfeld (DUNKERQUE)
- Ponts routes et Ponts rails divers, notamment à MONTBELIARD, sur le Doubs etc...

AMENAGEMENTS HYDRO ELECTRIQUES :

- Usine du Largue, sur le canal de Ventavon (Durance)
- Barrage de MALLEMORT (Durance)
- Barrage de SOULAGES (Gier)
- Barrage du PINAY (Gier)
- Barrage de GABACUT (Massif Central)
- Barrage de GREZIOLES
- Prises d'eau de FABIAN (Pyrénées)
- Canal de LA NESTE (pont-canal)

ETRANGER

- Barrage d'AOULI (Maroc)
- Barrage de MECHRA-KLILA (Maroc)
- Barrage de TARIK sur le Sefid Rud (Iran)
- Barrage de SANGAR "
- Barrage de LATIYAN sur le Jaje Rud "
- Aménagement du Rio NEUQUEN (Chocon) et du Rio Linay (Cerro Colorado) Argentine
- Aménagement du rio Negro (aval de Baygorria), site de Palmar Uruguay
- NHR IBRAHIM Liban

TRAVAUX MARITIMES

- Appontements et ouvrages divers à DUNKERQUE, CALAIS, BREST.

CONSTRUCTIONS INDUSTRIELLES ET BATIMENTS DIVERS, APPLICATIONS DE LA PRECONTRAINTE.

METHODUS
INVENIENDI
LINEAS CURVAS

Maximi Minimive proprietate gaudentes,

SIVE

SOLUTIO

PROBLEMATIS ISOPERIMETRICI
LATISSIMO SENSU ACCEPTI.

AUCTORE

LEONHARDO EULERO,

*Professore Regio, & Academiae Imperialis Scientiarum
PETROPOLITANÆ Socio.*



LAUSANNÆ & GENEVÆ,

Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.

MDCCXLIV.